Valerio Proietti

NOTE INTRODUTTIVE DI TEORIA DEGLI OPERATORI

Luglio 2013

Felice è chi ha potuto conoscere le cause delle cose.

— Virgilio

INDICE

F

1 PRELIMINARI

Notazione. Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach, adottiamo le seguenti notazioni:

- $\mathcal{L}(X)$ indica lo spazio degli operatori lineari e continui del tipo $T \colon X \to X$;
- se $M \subseteq X$, indichiamo con $\operatorname{span} M$ il sottospazio generato dai vettori di M;
- $\overline{M}$ e $\overline{\operatorname{span}}\, M$ indicano (rispettivamente) la chiusura topologica di M e $\operatorname{span} M$.
- $TM = \{Tx : x \in M\}$ e $\operatorname{ran} T = TX$ (dall'inglese *range*);
- L'operatore identità verrà indicato con I.

Definizione 1.1. Un *sottospazio invariante* per T è un sottospazio vettoriale *chiuso* $M \subseteq X$ tale che $Tx \in M$ ogniqualvolta $x \in M$; diciamo che M è *non banale* se $M \neq (0), X$ (i.e., M è un sottospazio *proprio* non nullo).

La famiglia dei sottospazi T-invarianti si denota $\operatorname{Lat} T$. Se $A \subseteq \mathcal{L}(X)$, allora $\operatorname{Lat} A = \bigcap_{T \in A} \operatorname{Lat} T$.

Osservazione 1.2. Lo spazio X e il sottospazio nullo sono sempre invarianti. In simboli, $\{(0), X\} \subseteq \operatorname{Lat} T$ per ogni $T \in \mathcal{L}(X)$.

In dimensione finita tratteremo il caso di scalari reali e complessi, tuttavia nel seguito l'interesse verterà esclusivamente sul campo $\mathbb{C}$.

Avvertiamo fin da subito che alcuni dei teoremi che dimostreremo sono validi senza richiedere che lo spazio X abbia una struttura di spazio di Banach; per questioni di omogeneità, si è preferito lasciare invariata la notazione.

1.0.1 Dimensione finita

In questa sottosezione supponiamo $\dim X = n \geqslant 2$. Useremo liberamente il fatto che i sottospazi vettoriali di X sono chiusi[1]. Dato $x \in X$, i vettori dell'insieme

$$O_n(x) = \{x, Tx, T^2x, \dots, T^n x\}$$

sono linearmente dipendenti poiché sono $n+1$. Questo ci garantisce l'esistenza di scalari $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tali che

$$\alpha_0 x + \alpha_1 Tx + \alpha_2 T^2 x + \cdots + \alpha_n T^n x = 0 \tag{1.1}$$

Definiamo ora il polinomio $p(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$. Per il Teorema fondamentale dell'algebra possiamo scrivere $p(t) = r_m(t) r_{m-1}(t) \dots r_1(t)$ per $m \leqslant n$ dove ogni r_i è un

1 I sottospazi di dimensione finita di uno spazio vettoriale topologico *qualsiasi* sono chiusi. Per una dimostrazione, si consulti [10, p. 125].

polinomio di grado 1 o 2. Nel caso complesso possiamo assumere che il grado sia 1. Da questo e da (1.1) segue

$$p(T)x = r_m(T)r_{m-1}(T)\dots r_1(T)x = 0$$

Usiamo quanto detto per provare la seguente proposizione.

Proposizione 1.3. *Se* $T \in \mathcal{L}(X)$ *esiste* $M \in \operatorname{Lat} T$ *tale che* $\dim M = 1, 2$. *Nel caso complesso* M *può essere scelto unidimensionale.*

Dimostrazione. Sia $x \in X \setminus \{0\}$ e definiamo un polinomio $p(t)$ come sopra. Scegliamo j come il minimo indice tale per cui $r_j(T)r_{j-1}(T)\dots r_1(T)x = 0$ e poniamo $u = r_{j-1}(T)\dots r_1(T)x$ (se $j = 1$ semplicemente $u = x$). Per minimalità di j si ha $u \neq 0$ e $r_j(T)u = 0$. Consideriamo dapprima il caso $r_j(t) = \alpha t + \beta$ con $\alpha \neq 0$. Abbiamo $r_j(T)u = (\alpha T + \beta I)u = 0$, cioè

$$Tu = -\alpha^{-1}\beta u$$

Lo spazio $M = \operatorname{span}\{u\}$ è invariante e non banale. Se invece abbiamo $r_j(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ con $\alpha \neq 0$ troviamo

$$T^2 u = -\alpha^{-1}\beta T u - \alpha^{-1}\gamma u$$

e dunque possiamo porre $M = \operatorname{span}\{u, Tu\}$. □

Nella dimostrazione precedente abbiamo usato idee che riprendono le nozioni di *autovalore* e *autovettore*. Uno scalare λ si dice autovalore se esiste un vettore non nullo x tale che $Tx = \lambda x$. Il vettore x si dirà autovettore di T relativo all'autovalore λ. Dalla definizione risulta chiaro che si ha un sottospazio invariante unidimensionale *se e solo se* si ha un autovalore.

Corollario 1.4. *Se* $T \in \mathcal{L}(X)$ *allora* $\operatorname{Lat} T \neq \{(0), X\}$ *se e solo se si ha uno dei seguenti casi:*

- $n \geqslant 3$*;*
- $n = 2$ *e* T *possiede un autovalore.*

Dimostrazione. Nel primo caso possiamo applicare la Proposizione 1.3. Dato che la dimensione del sottospazio che troviamo differisce da quella di (0) e X, concludiamo che esso è non banale. Per il secondo caso vale la discussione che precede questo teorema. □

Se il campo base è complesso, possiamo dire qualcosa di più sulla geometria dei sottospazi invarianti. La situazione è precisata dal seguente teorema.

Teorema 1.5. *Se* $T \in \mathcal{L}(X)$*, allora esiste una base* $e_1, \dots, e_n$ *tale che per ogni* i *il sottospazio* $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ *è* T*-invariante.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione di X. Se $\dim X = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Se $\dim X = n$, allora T possiede un autovettore x relativo all'autovalore λ. Sia M il sottospazio *proprio* definito da

$$M = (T - \lambda I)X \qquad \dim M < \dim X$$

Si osservi che $TM \subseteq M$. Infatti se $y = (T - \lambda I)z \in M$, si ha

$$Ty = T(T - \lambda I)z = (T - \lambda I)Tz \in \operatorname{ran}(T - \lambda I) = M$$

Possiamo quindi usare l'ipotesi induttiva sulla restrizione $T|_M$: si può trovare una base $f_1, \ldots, f_m$ di M tale che

$$T|_M f_i = Tf_i \in \operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_i\} \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Si completi ora la base di M a una base $f_1, \ldots, f_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ di X. In questa base si ha

$$Te_i = Te_i - \lambda e_i + \lambda e_i = (T - \lambda I)e_i + \lambda e_i \in M + \operatorname{span}\{e_i\}$$

□

Osservazione 1.6. Abbiamo visto come un operatore lineare su uno spazio complesso ammetta sempre un autovalore. Lo stesso non si può dire se lo spazio è su $\mathbb{R}$. Ad esempio, si può considerare l'operatore $T_\theta x = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$, che rappresenta la rotazione in senso antiorario di un angolo θ. Se muniamo $\mathbb{R}^2$ della norma euclidea, è facile verificare che rimane soddisfatta la relazione $\|T_\theta x\| = \|x\|$. Ne segue che gli unici autovalori ammissibili sono ± 1. In entrambi i casi si deve avere $\sin\theta = 0$, e dunque $T = \pm I$.

1.0.2 Dimensione infinita

Notazione. Adottiamo le seguenti notazioni:

- X e Y denotano spazi di Banach emphsul campo dei numeri complessi;
- Per $1 \leqslant p < \infty$, definiamo $l^p = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} : \|(a_n)\|_p^p = \sum_{i=0}^\infty |a_i|^p < \infty\}$;
- Per $1 \leqslant p < \infty$, definiamo $L^p(E) = \{f \colon E \to \mathbb{R} \text{ misurabili} : \|f\|_p^p = \int_E |f|^p \, dx < \infty\}$;
- $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$;
- $\mathbb{C}[t]$ indica lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi nella variabile t.

Assumeremo $\dim X = \infty$.

Osservazione 1.7. Si consideri l'operatore di *shift unilaterale* $S_+ \colon l^p \to l^p$ definito da $S_+(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$. Se x è non nullo si vede facilmente che i vettori di $O(x) = \{x, S_+x, S_+^2x, \ldots\}$ sono linearmente indipendenti: vettori distinti iniziano con un numero di zeri distinto. Si deduce che S_+ non possiede autovalori. D'altra parte, questo operatore ammette sottospazi invarianti non banali; ad esempio, lo spazio dei vettori la cui prima coordinata è nulla, in simboli, $\operatorname{ran} S_+$.

Nel contesto infinito-dimensionale acquista una certa importanza la proprietà di continuità che abbiamo richiesto agli elementi di $\mathcal{L}(X)$. Infatti, la sola linearità non è più sufficiente per garantire che un operatore sia continuo, come mostra il prossimo teorema e la successiva osservazione.

Definizione 1.8. Sia $T\colon X \to Y$ una trasformazione lineare. Diciamo che T è *limitata* se vale la seguente:

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| = \sup_{x \in X \smallsetminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$$

La funzione $\|\cdot\|_{\text{op}}$ è una norma, detta *norma operatoriale*.

Teorema 1.9. *Sia* $T\colon X \to Y$ *una trasformazione lineare. Sono equivalenti :*

- T *è una trasformazione lineare continua;*
- T *è una trasformazione lineare limitata.*

Inoltre, la norma operatoriale è submoltiplicativa, *cioè* $\|TS\|_{\text{op}} \leqslant \|T\|_{\text{op}} \cdot \|S\|_{\text{op}}$.

Dimostrazione. Se per assurdo T fosse illimitato, allora esisterebbe una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B}$ tale per cui $\|Tx_n\| \to \infty$. Definita la successione $y_n = \frac{x_n}{\|Tx_n\|}$, si ha $y_n \to 0$ poiché $\|y_n\| \leqslant \frac{1}{\|Tx_n\|}$. Dunque per continuità,

$$1 = \frac{\|Tx_n\|}{\|Tx_n\|} = \|Ty_n\| \to 0$$

chiaramente una contraddizione. La norma è submoltiplicativa perché abbiamo

$$\|TSx\| \leqslant \|T\|_{\text{op}}\|Sx\| \leqslant \|T\|_{\text{op}}\|S\|_{\text{op}}\|x\|$$

□

Un risultato di estrema importanza, che segna una fondamentale differenza geometrica tra gli spazi di dimensione finita e quelli in esame, è il seguente.

Teorema 1.10. *Sia* X *uno spazio vettoriale normato tale che la palla unitaria* $\overline{B}$ *sia compatta. Allora lo spazio* X *ha dimensione finita.*

Osserviamo che questa è una vera e propria caratterizzazione degli spazi infinito-dimensionali. Per dimostrarla, avremo bisogno del seguente lemma:

Lemma 1.11 (Riesz)**.** *Sia* X *uno spazio vettoriale normato, e* $M \subsetneq X$ *un sottospazio chiuso. Allora esiste* $u \in X$ *di norma unitaria tale che* $d(u, M) = \inf_{m\in M} \|u - m\| \geqslant 1/2$.

Dimostrazione. Sia $x \in X$ con $x \notin M$. Poniamo $d = d(x, M) > 0$ poiché M è chiuso. Scegliamo $m_0 \in M$ tale che

$$d \leqslant \|x - m_0\| \leqslant 2d \tag{1.2}$$

Definiamo $u = \frac{x - m_0}{\|x - m_0\|}$. Tale elemento soddisfa la nostra tesi poiché se $m \in M$ si ha

$$\|u - m\| = \|\frac{x - m_0}{\|x - m_0\|} - m\| = \frac{1}{\|x - m_0\|}\|x - m_0 - m\|x - m_0\|\| \tag{1.3}$$

Osserviamo che $m_0 + m\|x - m_0\| \in M$, poiché combinazione lineare di elementi di M; da (1.2) e (1.3) segue

$$\|u - m\| \geqslant \frac{1}{2d}\|x - m_0 - m\|x - m_0\|\| \geqslant \frac{1}{2d} d$$

□

Dimostrazione (del teorema precedente). Se per assurdo X avesse dimensione infinita, potremmo costruire una successione $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di sottospazi di dimensione finita (quindi chiusi) tali che $M_{n-1} \subseteq M_n$. Utilizzando il lemma precedente si ottiene

$$\exists u_n \text{ con } u_n \in M_n \text{ tale che } \|u_n\| = 1 \text{ e } d(u_n, M_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$$

In particolare, se $m < n$ abbiamo

$$\|u_n - u_m\| \geqslant \frac{1}{2}$$

si ha così che la successione u_n non ammette sottosucessioni convergenti, in contrasto con l'ipotesi secondo cui $\overline{B}$ è compatto. □

Dato un vettore $x \in X$ non nullo e $T \in \mathcal{L}(X)$, definiamo il *sottospazio ciclico generato da* x, denotato $W(x)$, come il più piccolo sottospazio chiuso contenente $O(x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$. In simboli, si ha

$$W(x) = \overline{\operatorname{span}}\, O(x)$$

Definizione 1.12. Diciamo che il vettore x è *ciclico* per T, se risulta $W(x) = X$.

È utile definire i sottospazi ciclici in termini di combinazioni polinomiali di T. In effetti, si ha

$$W(x) = \overline{\{p(T)x : p \in \mathbb{C}[t]\}} \tag{1.4}$$

Proposizione 1.13. *I sottospazi ciclici sono separabili.*

Dimostrazione. Definiamo $Q = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ e indichiamo con $Q[t]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in Q. La numerabilità di questo insieme deriva dai teoremi sulla cardinalità del prodotto cartesiano di insiemi numerabili. Dimostriamo che l'insieme $\{p(T)x : p \in Q[t]\}$ è denso. Fissato $\varepsilon > 0$, se $p \in W(x)$ è della forma $p = \sum_{i=0}^{n} p_i T^i x$, possiamo trovare $q = \sum_{i=0}^{n} q_i T^i x$ tale che

$$\|p - q\| = \|\sum_{i=0}^{n} (p_i - q_i) T^i x\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |p_i - q_i| \|T^i x\| < \varepsilon \|x\| \frac{\|T\|_{\text{op}}^{n+1} - 1}{\|T\|_{\text{op}} - 1}$$

Ciò è possibile perché dalla densità di Q in $\mathbb{C}$ segue che è possibile trovare un elemento $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in Q^n$ tale che $\sup_i |p_i - q_i| < \varepsilon$. Più in generale, per ogni $p \in W(x)$ esiste una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p, e ogni f_n è una somma finita. Allora abbiamo

$$\|p - g_n\| \leqslant \|p - f_n\| + \|f_n - g_n\|$$

e sappiamo che per ogni n fissato, possiamo trovare $g_n \in Q[t]$ arbitrariamente vicino a f_n. □

Questi risultati finali mettono in evidenza alcune importanti proprietà dei vettori ciclici.

Proposizione 1.14. *Si supponga x_0 vettore ciclico per $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora un vettore non nullo x è anch'esso ciclico se e solo se $x_0 \in W(x)$.*

Dimostrazione. Se x è T-ciclico allora per definizione $W(x) = X$ e dunque certamente $x_0 \in W(x)$. D'altra parte, essendo $W(x_0)$ il più piccolo sottospazio invariante contenente x_0, se $x_0 \in W(x)$ allora $W(x_0) = X \subseteq W(x)$. □

Proposizione 1.15. $T \in \mathcal{L}(X)$ *è tale che* $\operatorname{Lat} T = \{(0), X\}$ *se e solo se ogni vettore unitario è ciclico.*

Dimostrazione. È sufficiente osservare che vale $W(x) = W(\frac{x}{\|x\|})$ per ogni vettore non nullo. □

Corollario 1.16. *Sia* $T \in \mathcal{L}(X)$ *con* x_0 *vettore ciclico.* $\operatorname{Lat} T = \{(0), X\}$ *se e solo se per ogni vettore unitario* x *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un polinomio* $p \in \mathbb{C}[t]$ *tale che*

$$\|p(T)x - x_0\| < \varepsilon$$

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 1.15 è sufficiente mostrare che ogni vettore unitario è ciclico. Per la Proposizione 1.14, questo avviene se e solo se $x_0 \in W(x)$ per ogni vettore unitario x. Allora l'asserto segue da (1.4). □

Continuiamo a pensare X come spazio di Banach infinito-dimensionale sui numeri complessi, sebbene molti dei risultati esposti siano validi per spazi più generali.

1.0.3 Spazi duali

In questa sezione introduciamo gli spazi duali e altre nozioni ad essi legate.

Definizione 1.17. Il *duale topologico* di X è definito come segue:

$$X^* = \{\Lambda\colon X \to \mathbb{C} : \Lambda \text{ è lineare e continuo}\}$$

Analogamente, definiamo il *biduale topologico* di X, denotato X^{**}, come il duale di X^*.

Definizione 1.18. Definiamo la trasformazione *canonica* $J\colon X \to X^{**}$ come la funzione tale che $J(x)(\Lambda) = \hat{x}(\Lambda) = \Lambda x$. Se J è suriettiva, diremo che lo spazio X è *riflessivo*.

Il prossimo passo è dimostrare che J è un isometria; per farlo ci serviamo del Teorema di Hahn-Banach, che enunciamo nella versione per seminorme[2].

Definizione 1.19. Una *seminorma* su X è una funzione $p\colon X \to [0, \infty)$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}$;
- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$.

Teorema 1.20 (Hahn-Banach). *Sia* $M \subseteq X$ *un sottospazio e* $\Lambda\colon M \to \mathbb{C}$ *un funzionale lineare che soddisfa*

$$|\Lambda x| \leqslant p(x) \quad \forall x \in M \tag{1.5}$$

dove p *è una seminorma. Allora* Λ *può essere esteso a tutto lo spazio in modo che* (1.5) *valga per ogni* $x \in X$.

2 Questo è uno dei teoremi centrali dell'analisi funzionale. La dimostrazione fa uso del Lemma di Zorn, si consulti [8, Cap. 3].

Corollario 1.21.

- *Per ogni* $x \in X$ *si ha* $\|x\| = \max\{\Lambda x : \|\Lambda\|_{op} = 1\}$*;*
- X^* separa i punti, *cioè per ogni coppia di vettori distinti* $x, y \in X$ *esiste un funzionale* Λ *tale che* $\Lambda x \neq \Lambda y$*.*

Dimostrazione. Basta esibire un funzionale Λ per cui valga $\Lambda x = \|x\|$. Questa richiesta definisce Λ su $\text{span}\{x\}$, e dunque basta applicare il Teorema 1.20. Il secondo punto segue poiché possiamo trovare Λ tale che $\Lambda x - \Lambda y = \Lambda(x-y) = \|x-y\| \neq 0$. □

Corollario 1.22. *La trasformazione* J *è un isometria lineare, cioè* $\|J(x)\|_{op} = \|\hat{x}\|_{op} = \|x\|$*.*

Dimostrazione. Grazie al corollario precedente,

$$\|x\| = \sup_{\|\Lambda\|_{op} \leqslant 1} |\Lambda x| = \sup_{\|\Lambda\|_{op} \leqslant 1} |\hat{x}(\Lambda)| = \|\hat{x}\|_{op}$$

La linearità discende direttamente dal fatto che ogni $\Lambda \in X^*$ è lineare. □

Si osservi che dal teorema appena provato discende il fatto che X^{**} è uno spazio di Banach.

Teorema 1.23. X^* *munito della norma operatoriale è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo la completezza. Supponiamo che $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una succesione di Cauchy. Dato che

$$\|\Lambda_n x - \Lambda_m x\| \leqslant \|\Lambda_n - \Lambda_m\|_{op} \|x\| \tag{1.6}$$

abbiamo che $(\Lambda_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione numerica di Cauchy. Dunque

$$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x$$

esiste. Λ risulta lineare per linearità dell'operazione di limite. Se $\varepsilon > 0$, il membro destro di (1.6) è minore di $\varepsilon\|x\|$ per n e m sufficientemente grandi. Ne segue che

$$\|\Lambda x - \Lambda_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$$

per m grande. Allora $\|\Lambda x\| \leqslant (\|\Lambda_m\|_{op} + \varepsilon)\|x\|$, da cui la limitatezza, e $\|\Lambda - \Lambda_m\|_{op} \leqslant \varepsilon$. Quindi $\Lambda_m \to \Lambda$. □

1.0.4 Annullatori e trasformazione aggiunta

Definizione 1.24. Dato $M \subseteq X$, definiamo l'*annullatore* di M come la famiglia dei funzionali che si annullano su ogni elemento di M. Cioè,

$$M^\perp = \{\Lambda \in X^* : \Lambda x = 0 \quad \forall x \in M\}$$

Proposizione 1.25. *Se* $M \subseteq X$ *è un sottospazio chiuso, allora l'annullatore* $M^\perp$ *è isomorfo allo spazio duale di* X/M*.*

Dimostrazione. Dato $[x] \in X/M$, possiamo definire $\Lambda[x] = \Lambda x$ se e solo se $\Lambda x = \Lambda y$ per ogni vettore y nella classe di equivalenza di x. Questo significa che quando $x - y \in M$, si deve avere $\Lambda(x-y) = \Lambda x - \Lambda y = 0$. Dunque $\Lambda \in M^\perp$. □

Teorema 1.26. *Sia $M \subseteq X$ un sottoinsieme. Vale la seguente doppia implicazione:*

$$x \in \overline{\operatorname{span}} M \iff \Lambda x = 0 \quad \forall \Lambda \in M^\perp$$

Dimostrazione. Supponiamo che x non appartenga a $N = \overline{\operatorname{span}} M$. Allora

$$\inf_{y \in N} \|x - y\| = d > 0 \tag{1.7}$$

Definiamo il sottospazio $W = \{y + \alpha x : y \in N, \alpha \in \mathbb{C}\}$. Definiamo il funzionale Λ su W in questo modo:

$$\Lambda(y + \alpha x) = \alpha \tag{1.8}$$

Segue da (1.7) che $\|y + \alpha x\| \geqslant |\alpha| \cdot d$. Combinando questa stima con (1.8) otteniamo che Λ è limitato da d^{-1}. Per il Teorema 1.20, Λ può essere esteso a tutto lo spazio; si ha

$$\Lambda \in M^\perp, \quad \Lambda x = 1$$

□

Notazione. Adottiamo le seguenti notazioni:

- Se Λ è un funzionale lineare, talvolta scriveremo $\langle x, \Lambda \rangle$ in luogo di Λx;
- Il simbolo $\circ$ indica la composizione di applicazioni.

Teorema 1.27. *Ad ogni trasformazione lineare $T \colon X \to Y$ corrisponde un unica $T^* \colon Y^* \to X^*$ che soddisfa*

$$\langle Tx, \Lambda \rangle = \langle x, T^* \Lambda \rangle \tag{1.9}$$

per ogni $x \in X$ e $\Lambda \in Y^*$. Inoltre, vale $\|T\|_{op} = \|T^*\|_{op}$.

Dimostrazione. Per $\Lambda \in Y^*$, si definisca $T^*\Lambda = \Lambda \circ T$. Si osservi che $T^*\Lambda \in X^*$. Abbiamo

$$\langle x, T^*\Lambda \rangle = (T^*\Lambda)(x) = \Lambda(Tx) = \langle Tx, \Lambda \rangle$$

Il fatto che (1.9) valga per ogni x in X determina in modo unico $T^*\Lambda$. La linearità si verifica facilmente a partire dalla definizione (1.9). Inoltre, grazie al Corollario 1.21,

$$\begin{aligned} \|T\|_{op} &= \sup\{|\langle Tx, \Lambda \rangle| \, \|x\| \leqslant 1, \|\Lambda\|_{op} \leqslant 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, T^*\Lambda \rangle| : \|x\| \leqslant 1, \|\Lambda\|_{op} \leqslant 1\} \\ &= \sup\{\|T^*\Lambda\|_{op} : \|\Lambda\|_{op} \leqslant 1\} = \|T^*\|_{op} \end{aligned}$$

□

Definizione 1.28. La trasformazione T^* definita in (1.9) si dice *aggiunta* di T.

1.0.5 Topologie deboli

È possibile definire sugli spazi X, X^* una topologia meno "rigida" di quella indotta dalla norma. Procediamo con alcune definizioni generali.

Definizione 1.29. Una *prebase* di uno spazio topologico è una collezione $\mathcal{P}$ di aperti tale che la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{P}$ sia una base della topologia.

Definizione 1.30. Data una famiglia $(f_i)_{i\in I}$ di funzioni, definiamo la *topologia iniziale* su X come la topologia meno fine per cui $f_i \colon X \to Y_i$ è continua per ogni i. In altre parole, una prebase è data da

$$\bigcup_{i\in I}\{f_i^{-1}(U) : U \text{ è aperto in } Y_i\}$$

Osserviamo che per ogni $\Lambda \in X^*$, il funzionale $p_\Lambda(\cdot) = |\Lambda(\cdot)|$ è una seminorma. Ad esempio, possiamo definire la palla aperta (centrata in x di raggio r) indotta dalla seminorma p_Λ come l'insieme $B_r^\Lambda(x) = \{y \in X : p_\Lambda(x-y) < r\}$.

Definizione 1.31. Al variare di Λ in X^*, la famiglia di seminorme $\{p_\Lambda\}$ induce una topologia su X, che chiameremo *topologia debole*. Più esplicitamente, una prebase è data dalla seguente collezione di aperti:

$$\{B_r^\Lambda(x) : \Lambda \in X^*, x \in X, r > 0\}$$

Ragionando in modo analogo, per ogni $x \in X$ possiamo definire su X^* la seminorma $p_{\hat{x}}(\Lambda) = |\hat{x}(\Lambda)| = |\Lambda x|$. La notazione per la palla indotta da $p_{\hat{x}}$ è $B_r^{\hat{x}}$.

Definizione 1.32. Al variare di x in X, la famiglia di seminorme $\{p_{\hat{x}}\}$ induce una topologia su X^*, che chiameremo *topologia $*$-debole*. Più esplicitamente, una prebase è data dalla seguente collezione di aperti:

$$\{B_r^{\hat{x}}(\Lambda) : x \in X, \Lambda \in X^*, r > 0\}$$

Osservazione 1.33. In generale, la topologia debole su X^* è più fine di quella $*$-debole. Se X è riflessivo, segue dalla definizione che le due topologie coincidono.

Osservazione 1.34. Si verifica facilmente che la topologia debole non è altro che la topologia iniziale relativa ai funzionali di X^*. Allo steso modo, la topologia $*$-debole è la topologia iniziale relativa ai funzionali $\hat{x}$ al variare di x in X.

Teorema 1.35. *La topologia debole e quella $*$-debole sono di Hausdorff.*

Dimostrazione. Dal Corollario 1.21, segue che per ogni coppia $x, y \in X$ esiste $\Lambda \in X^*$ tale che $\Lambda x \neq \Lambda y$. Possiamo suppore $\Lambda x < \Lambda y$. Allora esisterà un numero reale r tale che $\Lambda x < r < \Lambda y$. Dato che Λ è continuo, sia $U = \Lambda^{-1}(-\infty, r)$ che $V = \Lambda^{-1}(r, \infty)$ sono aperti. Evidentemente $x \in U$ e $y \in V$. Quindi abbiamo trovato due intorni aperti la cui intersezione, per definizione, è vuota. □

1.0.6 Reti e Teorema di Banach-Alaoglu

Non è difficile accorgersi che le topologie deboli definite sopra non soddisfano il primo assioma di numerabilità (i.e., non sono a base locale numerabile). Intuitivamente, si può dire che la topologia di uno spazio a base locale più che numerabile non è completamente determinata dalle successioni. Questo fatto ci costringe ad introdurre una generalizzazione del concetto di successione in grado di caratterizzare completamente le proprietà di spazi topologici arbitrari.

Definizione 1.36. Un insieme parzialmente ordinato $(I, \geqslant)$ si dice *diretto* se per ogni $i, j \in I$ esiste $h \in I$ tale che $h \geqslant i$ e $h \geqslant j$.

In altre parole, un insieme è diretto quando ogni sottoinsieme finito ammette maggioranti.

Definizione 1.37. Una *rete* è un'applicazione $f\colon I \to X$, dove I è un insieme diretto.

- La rete converge a $x \in X$ se per ogni intorno U di x esiste un indice $i \in I$ tale che $f(j) \in U$ per ogni $j \geqslant i$;
- Il punto x è di accumulazione per la rete, se per ogni intorno U di x e per ogni indice $i \in I$ esiste $j \geqslant i$ tale che $f(j) \in U$.

Notazione. Adottiamo le seguenti notazioni:

- Una rete indicizzata da I sarà indicata con $(x_i)_{i \in I}$;
- χ_E indica la funzione caratteristica dell'insieme E;
- $L^\infty(E) = \{f\colon E \to \mathbb{R} : f \text{ è misurabile e limitata quasi ovunque}\}$;
- $|E|$ indica la misura di Lebesgue dell'insieme $E \subseteq \mathbb{R}$.

Ad esempio, per mostrare che un punto x appartiene alla chiusura di $M \subseteq X$ possiamo equivalentemente mostrare che esiste una rete a valori in M che converge a x.

Direttamente dalle definizioni seguono questi due criteri di convergenza:

- La rete $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ converge a x nella topologia debole se e solo Λx_i converge a Λx per ogni $\Lambda \in X^*$. In questo caso, scriveremo $x_i \rightharpoonup x$;
- La rete $(\Lambda_i)_{i \in I} \subseteq X^*$ converge a Λ nella topologia $*$-debole se e solo $\hat{x}(\Lambda_i)$ converge a $\hat{x}(\Lambda)$ per ogni $x \in X$.

Osservazione 1.38. Si noti come la convergenza di x_i non è altro che la convergenza puntuale della rete di funzionali $\hat{x}_i$. Analogamente, la convergenza di Λ_i si potrebbe riformulare come la convergenza puntuale dei funzionali Λ_i.

Una domanda naturale è se la convergenza debole (o $*$-debole) di una successione implichi la limitatezza. La risposta è affermativa, e per dimostrarlo ci serviamo del prossimo teorema[3].

3 Questo deriva dal Teorema della categoria di Baire, per la dimostrazione si consulti [15, Cap. 2].

Teorema 1.39 (Banach-Steinhaus). *Sia* Y *uno spazio normato e* $\{T_i\}_{i \in I}$ *una famiglia di trasformazioni lineari continue* $X \to Y$. *Allora vale la seguente implicazione:*

$$\forall x \in X \ \sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \Longrightarrow \sup_{i \in I} \|T_i\|_{\text{op}} < \infty$$

Teorema 1.40. *Una successione convergente nella topologia debole o* $*$*-debole è limitata.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso della topologia debole. Fissato Λ, si ha che la successione numerica $(\langle x_n, \Lambda \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente e dunque limitata. Dato che $\langle x_n, \Lambda \rangle = \langle \Lambda, \hat{x}_n \rangle$ abbiamo che la famiglia di operatori $\{\hat{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Banach-Steinhaus. Concludiamo che $\sup_n \|\hat{x}_n\|_{\text{op}} = \sup_n \|x_n\| < \infty$. □

Osservazione 1.41. Il fatto che le successioni numeriche convergenti siano limitate gioca un ruolo fondamentale nella prova precedente. Si noti che, al contrario, una rete convergente di numeri reali non è necessariamente limitata. Ad esempio, preso l'insieme diretto $I = \mathbb{Z}$ la rete definita da

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \geqslant 1 \\ i & \text{se } i \leqslant 0 \end{cases}$$

converge a 1 ed è chiaramente illimitata.

In effetti, il Teorema 1.40 non è più valido se si sostituiscono le reti alle successioni. Sia $X = L^1(\mathbb{R})$ e sia $\mathcal{O}$ la collezione degli intorni aperti di 0 che hanno misura di Lebesgue finita. Abbiamo che $X^* \simeq L^\infty(\mathbb{R})$, cioè i funzionali sono del tipo $g \mapsto \int fg \, dx$. La rete $\{\chi_U : U \in \mathcal{O}\}$ converge debolmente a zero. Si scelga $c > 0$ tale che $|f| \leqslant c$ quasi ovunque. Per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere $V \in \mathcal{O}$ con $|V| < \varepsilon / c$, allora $|\int f \chi_U \, dx| \leqslant c \cdot |U| \leqslant c \cdot |V| < \varepsilon$ non appena $V \supseteq U$. D'altronde la rete è illimitata poiché $\|\chi_{(-n,n)}\| = 2n \to \infty$.

Teorema 1.42. *Una trasformazione lineare è continua se e solo se lo è nella topologia debole.*

Dimostrazione. Supponiamo che la trasformazione sia illimitata. Allora esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $x_n \to 0$ (quindi $x_n \rightharpoonup 0$) e $\|Tx_n\| \to \infty$. Se T è continuo nella topologia debole, $Tx_n \rightharpoonup 0$ e dunque è limitata per il Teorema 1.40. Al contrario, se $(x_i)_{i \in I}$ è una rete che converge debolmente a x, per ogni Λ funzionale si deve avere $\langle T(x_i - x), \Lambda \rangle = \langle x_i - x, T^* \Lambda \rangle \rightharpoonup 0$ grazie all'Osservazione 1.34. □

A questo punto siamo pronti per dimostrare il teorema che conferisce significato e utilità allo studio delle topologie deboli.

Teorema 1.43 (Banach-Alaoglu). *La palla unitaria* $B^* = \{\Lambda \in X^* : \|\Lambda\|_{\text{op}} \leqslant 1\}$ *è compatta nella topologia* $*$*-debole.*

Dimostrazione. Ogni $\Lambda \in B^*$ mappa $B \subseteq X$ nel disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$. Dunque possiamo identificare B^* con un sottoinsieme di D^B, lo spazio delle funzioni da B in D.

L'osservazione cruciale è che la topologia $*$-debole su B^* non è altro che la topologia prodotto di D^B ristretta a B^*. In effetti, la topologia prodotto è per definizione quella meno fine per cui le funzioni di proiezione sono continue. È anche possibile pensarla come quella per cui le funzioni di valutazione $\hat{x}$ tali che

$\hat{x}(f) = f(x)$ risultano continue, ma questa è proprio la definizione di topologia $*$-debole (vedi Osservazione 1.34).

Per dimostrare la chiusura di B^* in D^B, supponiamo che la rete di funzionali lineari $(\Lambda_i)_{i \in I}$ converga a una certa funzione f. Ovviamente, $f \in D^B$ e dunque è limitata. Per verificare la linearità osserviamo che

$$\widehat{x+y}(f) = \lim_{i \in I} \widehat{x+y}(\Lambda_i) = \lim_{i \in I} \hat{x}(\Lambda_i) + \lim_{i \in I} \hat{y}(\Lambda_i) = \hat{x}(f) + \hat{y}(f)$$
$$\widehat{\alpha x}(f) = \lim_{i \in I} \widehat{\alpha x}(\Lambda_i) = \lim_{i \in I} \alpha \hat{x}(\Lambda_i) = \alpha \hat{x}(f)$$

Per il Teorema di Tychonoff D^B è compatto[4], da cui la tesi. □

Corollario 1.44. *Se X è riflessivo allora la palla unitaria $\overline{B}$ è compatta nella topologia debole.*

Dimostrazione. Se X è riflessivo, la topologia $*$-debole su X^{**} è precisamente la topologia debole su X. □

Lemma 1.45. *Siano $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ topologie su X tali che:*

- *X è di Hausdorff rispetto a $\mathcal{T}_1$;*
- *X è compatto rispetto a $\mathcal{T}_2$;*
- *$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.*

Allora $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Dimostrazione. Supponiamo che $U \subseteq X$ è $\mathcal{T}_2$-chiuso. Allora esso è compatto. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento $\mathcal{T}_1$-aperto di U. Data l'inclusione tra le topologie, deve esistere un sottoricoprimento finito. Allora U è $\mathcal{T}_1$-compatto e dunque chiuso dato che $\mathcal{T}_1$ è di Hausdorff. Ne segue $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. □

Teorema 1.46. *Supponiamo X separabile e $K \subseteq X^*$. Se K è $*$-debolmente compatto, allora la topologia $*$-debole ristretta a K è metrizzabile.*

Dimostrazione. Indichiamo la topologia $*$-debole con $\mathcal{T}_2$. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sottoinsieme denso. Asseriamo che la famiglia di seminorme $\{p_{\hat{x}_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ separa i punti. A questo scopo, supponiamo $p_{\hat{x}_n}(\Lambda) = 0$ per ogni n. Questo significa $\Lambda x_n = 0$ per ogni n, cioè Λ è un funzionale continuo e nullo su un sottoinsieme denso. Concludiamo che $\Lambda = 0$ e per linearità segue l'asserto. Allora, la funzione

$$d(\Lambda, \Upsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_{\hat{x}_n}(\Lambda - \Upsilon)}{1 + p_{\hat{x}_n}(\Lambda - \Upsilon)}$$

definisce una metrica che induce su X^* una topologia $\mathcal{T}_1$. La serie converge uniformemente e pertanto d risulta $\mathcal{T}_2$-continua su $X^* \times X^*$. Ne segue che le palle

$$B_r(\Lambda) = \{\Upsilon \in X^* : d(\Lambda, \Upsilon) < r\}$$

sono $\mathcal{T}_2$-aperte. Dunque $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Essendo indotta da una metrica, $\mathcal{T}_1$ è di Hausdorff e lo è anche la sua restrizione a K. Il lemma precedente implica $\mathcal{T}_1|_K = \mathcal{T}_2|_K$. □

4 Per questo risultato si può consultare [10, p. 131].

Corollario 1.47. *Se* X *è separabile allora la palla unitaria* $B^* \subseteq X^*$ *è sequenzialmente compatta nella topologia* $*$*-debole. Cioè, data una successione* $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tale che* $\|\Lambda_n\|_{op} \leqslant 1$ *per ogni* n*, esiste una estratta* Λ_{n_i} *convergente nella topologia* $*$*-debole.*

Dimostrazione. Il Teorema 1.43 e il Teorema 1.46 affermano che B^* è un sottoinsieme compatto di uno spazio metrico. Per spazi metrici compattezza e compattezza per successioni sono condizioni equivalenti. □

2 OPERATORI COMPATTI

Scopo di questo capitolo è introdurre la nozione fondamentale di operatore compatto e alcuni risultati basilari di teoria spettrale.

Ricordiamo che un sottoinsieme M di uno spazio metrico completo si dice *relativamente compatto* se la sua chiusura è compatta (i.e., $\overline{M}$ è compatto). Condizioni equivalenti[1] sono:

- Ogni successione di punti di M ammette un'estratta di Cauchy;
- M è *totalmente limitato*, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile coprirlo con un numero finito di palle di raggio ε.

2.1 OPERATORI COMPATTI

Cominciamo la sezione con una proposizione di carattere generale.

Proposizione 2.1. *Sia* $T\colon X \to Y$ *una trasformazione lineare continua, e* M_1, M_2 *sottoinsiemi di* X *relativamente compatti.*

- $N \subseteq M_1$ *è relativamente compatto;*
- TM_1 *è relativamente compatto;*
- *La somma* $M_1 + M_2$ *è anch'essa relativamente compatta.*

Dimostrazione. Una successione contenuta in N è anche tutta contenuta in M_1, dunque è possibile estrarre una sottosuccesione di Cauchy.

Una successione contenuta in TM_1 è del tipo $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La successione x_n, in quanto contenuta nell'insieme relativamente compatto M_1, ammette una estratta x_{n_i} di Cauchy. Allora possiamo scrivere,

$$\|Tx_{n_i} - Tx_{n_j}\| = \|T(x_{n_i} - x_{n_j})\| \leqslant \|T\|_{\text{op}}\|x_{n_i} - x_{n_j}\|$$

e passando al limite segue il secondo punto.

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una succesione in $M_1 + M_2$, deve essere $x_n = y_n + z_n$, dove $y_n \in M_1$ e $z_n \in M_2$. Chiaramente, y_n è contenuta nell'insieme relativamente compatto M_1, dunque ammette una estratta di indice n_i di Cauchy. Allora abbiamo,

$$\|x_{n_i} - x_{n_j}\| = \|(y_{n_i} - y_{n_j}) + (z_{n_i} - z_{n_j})\| \leqslant \|y_{n_i} - y_{n_j}\| + \|z_{n_i} - z_{n_j}\|$$

applicando lo stesso ragionamento a z_{n_i} ricaviamo una sotto-sottosuccessione di Cauchy. □

1 Si consulti [10, p. 112].

Definizione 2.2. Una trasformazione (mappa) lineare $S\colon X \to Y$ si dice *compatta* se l'immagine SB della palla unitaria è relativamente compatta in Y.

Teorema 2.3.

1. *La somma di due operatori compatti $X \to Y$ è compatta;*
2. *Un multiplo scalare di una trasformazione compatta è compatto;*
3. *Sia W uno spazio di Banach, $T\colon Y \to W$ una trasformazione lineare limitata, e $S\colon X \to Y$ compatta. Allora il prodotto $TS\colon X \to W$ è compatto;*
4. *Sia Z uno spazio di Banach, $R\colon Z \to X$ una trasformazione lineare limitata, e $S\colon X \to Y$ compatta. Allora il prodotto $SR\colon Z \to Y$ è compatto;*
5. *Una trasformazione lineare compatta è continua (limitata);*
6. *Sia $S_n\colon X \to Y$ una successione di mappe compatte che converge uniformemente a S,*
$$\lim_{n\to\infty} \|S_n - S\|_{\mathrm{op}} = 0$$
allora S è compatta.

Dimostrazione.

1. Siano S_1 e S_2 le mappe in questione. Si ha $(S_1 + S_2)B \subseteq S_1B + S_2B$, e possiamo applicare la proposizione precedente;
2. Caso speciale del punto 3;
3. SB è relativamente compatto per definizione. $T(SB)$ è relativamente compatto grazie alla Proposizione 2.1;
4. La mappa R è limitata e quindi porta la palla unitaria in un sottoionsieme della palla di raggio $\|R\|_{\mathrm{op}}$. L'immagine tramite S di questo insieme è relativamente compatta;
5. Per definizione, la palla unitaria viene mappata in un insieme limitato, poiché a chiusura compatta.
6. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo n tale che $\|S_n - S\|_{\mathrm{op}} < \varepsilon$. S_nB può essere coperto da un numero finito di palle di raggio ε. Allora SB può essere coperto da palle di raggio 2ε, con gli stessi centri.

□

Nel linguaggio dell'algebra, il teorema precedente afferma che gli operatori compatti formano un *ideale bilatero chiuso* di $\mathcal{L}(X)$.

Definizione 2.4. Un operatore $T \in \mathcal{L}(X)$ si dice *completamente continuo* se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ si ha $Tx_n \to Tx$.

In altri termini, un operatore di questo genere mappa successioni debolmente convergenti in successioni che convergono in norma.

Teorema 2.5. *Sia* $T \in \mathcal{L}(X)$*.*

- *Se* T *è compatto, allora è completamente continuo;*
- *Se* X *è riflessivo e* T *è completamente continuo, allora* T *è compatto.*

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente nella topologia debole. Per il Teorema 1.40 sappiamo che $c = \sup_n \|x_n\| < \infty$. Possiamo assumere che il limite di x_n sia 0 e che $c \leqslant 1$. Poiché T è compatto, esiste una estratta e un vettore $y \in X$ tali che $Tx_{n_i} \to y$. Ma per il Teorema 1.42 T è continuo nella topologia debole e dunque $Tx_{n_i} \rightharpoonup T(0) = 0$. Allora $y = 0$. Dato che 0 è l'unico punto di accumulazione di $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e questa successione è contenuta in un insieme compatto, deve essere $Tx_n \to 0$.

Per il secondo punto assumiamo prima che X sia separabile. Abbiamo visto nel Corollario 1.47 che la palla unitaria $\overline{B}$, munita della topologia debole, è uno spazio metrico compatto. Da una successione contenuta in $\overline{B}$ possiamo estrarre una sottosuccesione tale che $x_{n_i} \rightharpoonup x$. Dato che T è completamente continuo, abbiamo $Tx_{n_i} \to Tx$; allora $T\overline{B}$ è sequenzialmente compatto, cioè T è un operatore compatto.

Ora sia X arbitrario e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B}$. Se poniamo $X_1 = \overline{\operatorname{span}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, abbiamo che X_1 è separabile e riflessivo. Dunque possiamo ripetere lo stesso ragionamento con la restrizione $T|_{X_1}$. □

Notazione. Adottiamo le seguenti notazioni:

- Indichiamo col simbolo $\mathcal{K}(X)$ l'ideale degli operatori compatti di $\mathcal{L}(X)$;
- Dato M sottospazio di X, poniamo $\operatorname{codim} M = \dim(X/M)$;
- Dato $T \in \mathcal{L}(X)$, definiamo $\ker T = \{x \in X : Tx = 0\}$.

Teorema 2.6. *Sia* $S \in \mathcal{K}(X)$ *e* $T = I - S$*.*

1. $\ker T$ *ha dimensione finita;*
2. *Posto* $\ker T^i = N_i$*, esiste* j *tale che*
$$N_i = N_j \ \forall\, i > j \tag{2.1}$$
3. $\operatorname{ran} T$ *è un sottospazio chiuso.*

Dimostrazione. Per il punto 1 è sufficiente osservare che $x \in \ker T$ se $x = Tx$. La palla unitaria in $\ker T$ è dunque relativamente compatta, e applicando il Teorema 1.10 concludiamo. Per il punto 2, assumiamo che (2.1) sia falsa, cioè che N_{i-1} sia un sottospazio proprio di N_i per ogni i. Applicando il Lemma 1.11, troviamo per ogni i un elemento x_i con le seguenti proprietà:

$$x_i \in N_i,\ \|x_i\| = 1 \text{ e } d(x_i, N_{i-1}) \geqslant \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Scelto $m < n$, dalla definizione di T,

$$Sx_n - Sx_m = x_n - Tx_n - x_m + Tx_m$$

gli ultimi tre termini a destra appartengono a N_{n-1}, quindi da (2.2) segue che la loro somma dista da x_n almeno $1/2$. Questo prova $\|Sx_n - Sx_m\| \geqslant 1/2$ e dunque non possono esistere sottosuccessioni di Cauchy, in contrasto con la compattezza di S.

Passiamo al punto 3. Dobbiamo dimostrare che se $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione convergente in $\operatorname{ran} T$,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y, \quad Tx_n = y_n,$$

allora anche y appartiene a $\operatorname{ran} T$. Denotiamo con d_n la distanza di x_n da $\ker T$:

$$d_n = \inf_{z \in \ker T} \|x_n - z\| \tag{2.3}$$

Asseriamo che la successione d_n è limitata. Possiamo scegliere z_n in $\ker T$ tale che $w_n = x_n - z_n$ soddisfi

$$\|w_n\| = \|x_n - z_n\| < 2d_n \tag{2.4}$$

Dato che $z_n \in \ker T$, si ha $Tw_n = Tx_n - Tz_n = y_n$. Supponiamo per assurdo che la successione d_n sia illimitata. Dato che la successione $\|y_n\|$ è limitata, possiamo dividere per d_n e ottenere (passando eventualmente a una sottosuccessione)

$$T\frac{w_n}{d_n} = \frac{y_n}{d_n} \to 0 \tag{2.5}$$

Poniamo $u_n = \frac{w_n}{d_n}$. Segue da (2.4) che $\|u_n\| \leqslant 2$. Usando (2.5) e la definizione di T, vediamo che $u_n - Su_n \to 0$. Dato che S è compatto, possiamo estrarre una sottosuccessione convergente da Su_n; ma allora questo vale anche per u_n:

$$u_{n_i} \to u \tag{2.6}$$

Dato che T è continuo, da (2.5) abbiamo $\lim Tu_{n_i} = Tu = 0$, cioè u appartiene a $\ker T$. D'altra parte, segue da (2.3) che $\|u_{n_i} - z\| \geqslant 1$ per ogni z in $\ker T$. Dato che possiamo scegliere $z = u$, siamo in contraddizione con (2.6) e dunque d_n è una successione limitata. Ancora usando la definizione di T, abbiamo che $w_n - Sw_n = y_n \to y$. Ora che abbiamo a disposizione la limitatezza di d_n, deduciamo da (2.4) che anche la successione w_n è limitata. Allora per compattezza Sw_n ammette una sottosuccessione convergente e lo stesso si può dire di w_n. Se chiamiamo tale limite w, rimane soddisfatta (per continuità) la relazione

$$w - Sw = Tw = y$$

cioè $y \in \operatorname{ran} T$, e la dimostrazione è conclusa. □

Se supponiamo che M sia un sottospazio chiuso dello spazio di Banach X, possiamo dotare X/M di una struttura di spazio normato con la seguente definizione:

$$\|[x]\| = \inf\{\|y\| : y \in [x]\} \tag{2.7}$$

Proposizione 2.7. *Sia* $S\colon X \to Y$ *una mappa compatta,* $M \subseteq X$ *un sottospazio chiuso e* N *la chiusura topologica di* SM.

- *La restrizione* $S|_M\colon M \to N$ *è ancora compatta;*

- *Supponiamo* $Y = X$ *e* M *invariante. Allora* $S \colon X/M \to X/M$ *è compatto.*

Dimostrazione. Il primo punto è immediato. Il secondo segue applicando le definizioni date in precedenza; osserviamo che $S[x] = [Sx]$ è una buona definizione, poiché se $y \in [x]$ è un altro rappresentante, allora $S[y] = [Sy] = [Sx]$. Infatti $Sx - Sy = S(x - y) \in M$ per invarianza del sottospazio M. □

Teorema 2.8. *Sia* $S \in \mathcal{K}(X)$*. Posto* $T = I - S$*, abbiamo la seguente uguaglianza:*

$$\dim \ker T = \operatorname{codim} \operatorname{ran} T$$

Dimostrazione. Affrontiamo dapprima il caso con nucleo banale:

$$\dim \ker T = 0 \tag{2.8}$$

Dobbiamo dimostrare che $\operatorname{ran} T = X$. Supponiamo, per assurdo, che $\operatorname{ran} T = X_1$ sia un sottospazio proprio di X. Per l'ipotesi (2.8), T è iniettiva; ne segue che $TX_1 = X_2$ deve essere un sottospazio proprio di X_1. Definiamo $X_k = T^k X$. Ragionando in modo analogo, deduciamo che vale la seguente:

$$X \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \cdots$$

Per il Teorema 2.6, $X_1 = \operatorname{ran} T$ è chiuso. Asseriamo che lo stesso si può dire di X_k, per ogni k. In effeti, $X_k = \operatorname{ran} T^k$ e si ha $T^k = (I - S)^k = I + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} S^i$. Applicando il Teorema 2.3, deduciamo che T^k è somma dell'identità e di un operatore compatto, dunque ha immagine chiusa (ancora per il Teorema 2.6). Invochiamo ora il Lemma 1.11, e scegliamo $x_k \in X_k$ tale che

$$\|x_k\| = 1 \text{ e } d(x_k, X_k + 1) \geqslant \frac{1}{2} \tag{2.9}$$

Se m e n sono indici distinti con $m < n$ abbiamo (usando la definizione di T):

$$Sx_m - Sx_n = x_m - Tx_m - x_n + Tx_n$$

Come nella dimostrazione precedente, vediamo che gli ultimi tre termini sulla destra appartengono a X_{m+1}. Allora, grazie a (2.9), $\|Sx_m - Sx_n\| \geqslant 1/2$ — contraddizione. Questo completa la dimostrazione sotto l'ipotesi (2.8).

Assumiamo che T abbia nucleo non banale e poniamo $N_i = \ker T^i$. Abbiamo dal Teorema 2.6 che esiste un indice j tale che

$$N_j = N_{j+1} \tag{2.10}$$

Il sottospazio $N = N_j$ è invariante per T, e anche per S. Possiamo allora applicare la Proposizione 2.7 e concludere che $S \colon X/N \to X/N$ è una mappa compatta. Asseriamo che $T \colon X/N \to X/N$ ha nucleo banale. Se infatti esistesse $x \notin N$ tale che $Tx \in N$ ciò vorrebbe dire che x appartiene a N_{j+1} (ricordiamo che N è il nucelo di T^j). Questo è in evidente contraddizione con (2.10). Dunque l'operatore T definito su X/N soddisfa (2.8); ne segue che T mappa biunivocamente X/N in sé. Ciò significa che per ogni y in X, esiste $x \in X$ e $z \in N$ tali che

$$Tx = y + z$$

Possiamo esprimere questo fatto con questa scrittura:

$$X = \operatorname{ran} T + N \tag{2.11}$$

intendendo che ogni vettore dello spazio può essere espresso come somma di un vettore in $\operatorname{ran} T$ e uno in N. Per $j > 1$, l'intersezione $\operatorname{ran} T \cap N$ è non vuota, e consiste di quei vettori $n \in N$ della forma $n = Tz$. Applicando T^j a quest'ultima relazione e ricordando (2.10), deduciamo che $z \in N$. Secondo un noto teorema di algebra lineare, la dimensione di $\ker T|_N$ (la restrizione di T al sottospazio N) uguaglia la codimensione di $\operatorname{ran} T|_N$. Segue la seguente:

$$\dim \operatorname{ran} T \cap N = \dim N - \dim \ker T$$

La combinazione di questa uguaglianza e di (2.11) dimostrano l'asserto. □

La teoria sviluppata fin qui ci permette di dimostrare un teorema che gode di un certo interesse nell'ambito della teoria delle equazioni integrali; tuttavia, noi ne faremo un uso diverso più avanti nel capitolo.

Teorema 2.9 (Alternativa di Fredholm)**.** *Sia* $S \in \mathcal{K}(X)$ *e* $T = I - S$.

- $x \in \operatorname{ran} T \iff \langle x, \Lambda \rangle = 0 \quad \forall \Lambda \in \ker T^*$;
- $\dim \ker T = \dim \ker T^*$.

Dimostrazione. La relazione che definisce l'operatore aggiunto è

$$\langle Tx, \Lambda \rangle = \langle x, T^*\Lambda \rangle$$

da cui segue che $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$. Sappiamo dal Teorema 2.6 che $\operatorname{ran} T$ è chiuso dunque possiamo applicare il Teorema 1.26 e il primo punto è dimostrato.

Grazie alla Proposizione 1.25, per un sottospazio chiuso M, valgono le uguaglianze

$$\dim M^\perp = \dim(X/M)^* = \dim(X/M) = \operatorname{codim} M \tag{2.12}$$

Se applichiamo (2.12) con $M = \operatorname{ran} T$ troviamo $\dim \ker T^* = \operatorname{codim} \operatorname{ran} T$. Allora il Teorema 2.8 ci permette di concludere $\dim \ker T^* = \dim \ker T$. □

2.2 ELEMENTI DI TEORIA SPETTRALE

Cominciamo con qualche definizione.

Definizione 2.10. Un'*algebra complessa* è uno spazio vettoriale A su $\mathbb{C}$ in cui è definita una moltiplicazione che soddisfa

$$x(yz) = (xy)z, \quad x(y+z) = xy + xz, \quad (x+y)z = xz + yz, \quad \alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y$$

per ogni $x, y, z \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.
Inoltre, se A è uno spazio di Banach tale che:

- $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in A$;

- $\exists e \in A : e = xe = ex \quad \forall x \in A$;
- $\|e\| = 1$.

Allora diremo che A è un'*algebra di Banach*.

Definizione 2.11.

- Un elemento x di A si dice *invertibile* se esiste un elemento $x^{-1} \in A$ tale che $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. L'elemento x^{-1} si dirà *inverso* di x;
- Sia φ un funzionale lineare su A non identicamente nullo. Se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ per ogni $x, y \in A$, allora diremo che φ è un *omomorfsmo complesso*.

Notazione. In tutta la sezione, A sarà un'algebra di Banach.

Proposizione 2.12.

- *L'inverso di $x \in A$, quando esiste, è unico.*
- *Se φ è un omomorfismo allora $\varphi(e) = 1$ e $\varphi(x) \neq 0$ per ogni x invertibile.*

Dimostrazione. Supponiamo $yx = e = xz$. Allora $y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z$. Per qualche x in A si ha $\varphi(x) \neq 0$. Allora $\varphi(e) = 1$ poiché $\varphi(x) = \varphi(xe) = \varphi(x)\varphi(e)$. Se x è invertibile, allora $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1$, cosicché $\varphi(x) \neq 0$. □

Teorema 2.13. *Sia $x \in A$, $\|x\| < 1$.*

- $e - x$ *è invertibile;*
- $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leqslant \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|^2}$;
- $|\varphi(x)| < 1$ *per ogni omomorfismo complesso φ su A.*

Dimostrazione. Dato che $\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$ e $\|x\| < 1$, gli elementi della forma

$$s_n = e + x + x^2 + \cdots + x^n \tag{2.13}$$

formano una successione di Cauchy in A. Per completezza, esiste s tale che $s_n \to s$. Dato che $x^n \to 0$, scriviamo

$$s_n \cdot (e-x) = e - x^{n+1} = (e-x) \cdot s_n$$

Dalla continuità della moltiplicazione deduciamo che s è l'inverso che cercavamo.
Il secondo asserto segue da (2.13),

$$\|s - e - x\| = \|x^2 + x^3 + \ldots\| \leqslant \sum_{i=2}^{\infty} \|x\|^i = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|^2}$$

Per il terzo punto supponiamo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \geqslant 1$, $e - \lambda^{-1}x$ è invertibile, dunque

$$1 - \lambda^{-1}\varphi(x) = \varphi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0$$

Quindi $\varphi(x) \neq \lambda$. □

Definizione 2.14. Se A è un algebra di Banach indichiamo con $G = G(A)$ il gruppo degli elementi invertibili di A.

- Lo *spettro* di x è l'insieme $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x$ *non* è invertibile$\}$;
- Il *raggio spettrale* di x è il numero $\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$;
- L'*insieme risolvente* di x è il complementare dello spettro, cioè l'insieme $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - x)^{-1}$ esiste$\}$.

Lemma 2.15. *Siano $x \in G(A)$ e $h \in A$, con $\|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Allora $x + h \in G(A)$, e vale*

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leqslant 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2 \tag{2.14}$$

Dimostrazione. Dato che $(x+h) = x(e + x^{-1}h)$ e $\|x^{-1}h\| < \frac{1}{2}$, il Teorema 2.13 implica che $x + h \in G(A)$ e che il membro destro della seguente identità,

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = [(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1}$$

valga al massimo $2\|x^{-1}h\|^2\|x^{-1}\|$. □

Teorema 2.16. $G(A)$ *è un sottoinsieme aperto di* A*, e la mappa* $x \mapsto x^{-1}$ *è un omeomorfismo di* $G(A)$ *in sé.*

Dimostrazione. È immediato verificare che il lemma precedente implica la continuità della mappa e il fatto che $G(A)$ sia aperto. Inoltre, dato che $x \mapsto x^{-1}$ è inversa di se stessa, è un omeomorfismo. □

Nella dimostrazione del prossimo teorema applicheremo alcuni classici risultati dell'analisi complessa a funzioni a valori in un'algebra di Banach. Questa tecnica ci permetterà di ricavare una formula dalle molteplici applicazioni.

Teorema 2.17. *Sia $x \in A$.*

- *Lo spettro $\sigma(x)$ è compatto e non vuoto;*
- *Il raggio spettrale $\rho(x)$ soddisfa*

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \|x^n\|^{1/n}$$

Dimostrazione. Se $|\lambda| > \|x\|$, allora $e - \lambda^{-1}x$ è invertibile per il Teorema 2.13. Risulta invertibile anche $\lambda e - x$. Questo prova che $\lambda \notin \sigma(x)$. In particolare, $\sigma(x)$ è un insieme limitato. Per dimostrare che è chiuso, definiamo $g \colon \mathbb{C} \to A$ tale che $g(\lambda) = \lambda e - x$. Allora g è continua, e il complementare Ω di $\sigma(x)$ è $g^{-1}(G(A))$, che è un insieme aperto grazie al Teorema 2.16. Ne segue che $\sigma(x)$ è compatto.

Ora definiamo $f \colon \Omega \to G(A)$ tale che $f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$. In (2.14), sostituiamo x con $\lambda e - x$ e h con $(\mu - \lambda)e$. Se μ è abbastanza vicino a λ, il risultato di tale sostituzione è

$$\|f(\mu) - f(\lambda) + (\mu - \lambda)f^2(\lambda)\| \leqslant 2\|f(\lambda)\|^3|\mu - \lambda|^2$$

cosicché si ottiene

$$\lim_{\mu\to\lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} = -f^2(\lambda)$$

cioè f è una funzione olomorfa in Ω.

Se $\lambda > \|x\|$, ragionando alla stessa maniera del Teorema 2.13, troviamo

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n = \lambda^{-1} e + \lambda^{-2} x + \dots$$

Per l'unicità dell'espansione in serie di Laurent, deve essere

$$x^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \lambda^n f(\lambda) d\lambda \qquad r > \rho(x),\ n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.15}$$

Se $\sigma(x)$ fosse vuoto, allora Ω sarebbe $\mathbb{C}$ e dunque il Teorema di Cauchy implicherebbe che gli integrali in (2.15) sono tutti nulli. D'altra parte, per $n = 0$ il membro di sinistra vale $e \neq 0$. Dunque $\sigma(x)$ è non vuoto.

Posto

$$M(r) = \max_{\theta} \|f(re^{i\theta})\| \qquad r > \rho(x)$$

la continuità di f implica $M(r) < \infty$. Con questa posizione, (2.15) restituisce

$$\|x^n\| \leqslant r^{n+1} M(r) \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leqslant r \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leqslant \rho(x)$$

D'altra parte, se $\lambda \in \sigma(x)$ la fattorizzazione

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1} e + \dots + x^{n-1})$$

mostra che $\lambda^n e - x^n$ non è invertibile. Dunque $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Dato che $|\lambda^n| \leqslant \|x^n\|$ per $n \geqslant 1$, otteniamo la disuguaglianza opposta:

$$\rho(x) \leqslant \inf_{n \geqslant 1} \|x^n\|^{1/n}$$

che conclude la dimostrazione. □

Corollario 2.18 (Gelfand-Mazur). *Se ogni elemento non nullo è invertibile, allora A è isometricamente isomorfa al campo $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Se $\lambda \neq \mu$, allora al massimo uno tra $\lambda e - x$ e $\mu e - x$ può essere zero per ogni $x \in A$. Dunque $\sigma(x)$ consiste di un singolo numero, diciamo $\sigma(x) = \{\lambda(x)\}$. Abbiamo $\lambda(x)e - x = 0$. La moltiplicatività di λ si deduce da

$$\lambda(x)\lambda(y)e - xy = \lambda(x)\lambda(y)e - \lambda(x)y + \lambda(x)y - xy = \lambda(x)(\lambda(y)e - y) + (\lambda(x)e - y)y = 0$$

Segue facilmente che $\lambda \colon A \to \mathbb{C}$ è la mappa richiesta. □

A questo punto, osserviamo che se X è uno spazio di Banach (sul campo dei numeri complessi) allora $\mathcal{L}(X)$ è un'algebra di Banach[2].

2 Questa è una semplice verifica. La completezza si dimostra in maniera totalmente analoga a quanto fatto nel Teorema 1.23.

Definizione 2.19. Sia $\mathsf{T} \in \mathcal{L}(X)$. Indichiamo con $\sigma_a(\mathsf{T})$ lo *spettro approssimato* di T, cioè l'insieme dei numeri complessi $\lambda \in \sigma(\mathsf{T})$ tali che esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di vettori unitari che soddisfa la relazione

$$\mathsf{T}x_n - \lambda x_n \to 0$$

Il numero $\lambda \in \sigma_a(\mathsf{T})$ si dirà *autovalore approssimato*, i vettori x_n *autovettori approssimati*.

Teorema 2.20. *Sia* $\mathsf{T} \in \mathcal{L}(X)$. *L'insieme* $\sigma_a(\mathsf{T})$ *è chiuso e contiene la frontiera di* $\sigma(\mathsf{T})$.

Dimostrazione. Si osservi che un punto $\lambda \in \mathbb{C}$ non appartiene a $\sigma_a(\mathsf{T})$ se e solo se esiste $\delta > 0$ tale che $\|(\lambda I - \mathsf{T})x\| \geqslant \delta\|x\|$ per ogni $x \in X$. Allora se $|\mu| < \delta$, utilizzando la disuguaglianza triangolare si vede che $\lambda + \mu$ non è un autovalore approssimato.

Per dimostrare la parte sulla frontiera dello spettro, prendiamo $f\colon \Omega \to G(\mathcal{L}(X))$, come nel Teorema 2.17. Fissiamo $\lambda \in \Omega$, e sia μ tale che $|\mu| < 1/\|f(\lambda)\|_{op}$. La funzione $g(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i(\lambda I - \mathsf{T})^{-i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i f(\lambda)^{i+1}$ è ben definita, poiché $\|\mu f(\lambda)\|_{op} < 1$ e quindi la serie è convergente.

Abbiamo $(\lambda I - \mu I - \mathsf{T})g(\mu) = (\lambda I - \mathsf{T})g(\mu) - \mu g(\mu)$, cioè

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i(\lambda I - \mathsf{T})^{-i} - \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{i+1}(\lambda I - \mathsf{T})^{-i-1} = I$$

Dato che $g(\mu)$ commuta con $\lambda I - \mu I - \mathsf{T}$, esso è il suo inverso. Ciò dimostra che $\lambda - \mu \in \Omega$, cioè che

$$\inf_{\mu \in \sigma(\mathsf{T})} |\lambda - \mu| = d(\lambda) \geqslant \frac{1}{\|f(\lambda)\|_{op}}$$

Sia μ sulla frontiera dello spettro, e sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\lambda \in \Omega, |\lambda - \mu| < \varepsilon/2$; per quanto dimostrato,

$$\|(\lambda I - \mathsf{T})^{-1}\|_{op} \geqslant \frac{1}{d(\lambda)} \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$$

Possiamo assumere che esista un $y \in X$, $\|y\| = 1$, tale che

$$\|(\lambda I - \mathsf{T})^{-1}y\|_{op} \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$$

Poniamo $x = (\lambda I - \mathsf{T})^{-1}y/\|(\lambda I - \mathsf{T})^{-1}y\|_{op}$. Allora $\|x\| = 1$ e

$$\|(\mu I - \mathsf{T})x - (\lambda I - \mathsf{T})x\| < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \|(\mu I - \mathsf{T})x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|(\lambda I - \mathsf{T})x\| < \varepsilon$$

che è quanto volevamo. □

Osservazione 2.21. La dimostrazione precedente dice molte cose: innanzitutto dimostra che l'insieme risolvente è aperto, e fornisce dunque una dimostrazione alternativa della compattezza di $\sigma(\mathsf{T})$. Non solo, se fosse $\sigma_a(\mathsf{T}) = \emptyset$ avremmo che $\sigma(\mathsf{T})$ è un insieme chiuso e aperto poiché avrebbe frontiera vuota; per connessione, $\sigma(\mathsf{T}) = \mathbb{C}$. Ma questo è assurdo: infatti avremmo $\rho(\mathsf{T}) = \infty$ e dalla formula per il raggio spettrale seguirebbe che T è un operatore illimitato.

Abbiamo dunque dimostrato che $\sigma_a(\mathsf{T})$ è non vuoto, cioè che ogni operatore possiede autovalori approssimati.

Dimostriamo l'ultimo teorema della sezione, tornando nuovamente a parlare di operatori compatti.

Teorema 2.22. *Supponiamo* $S \in \mathcal{K}(X)$.

- *Lo spettro di* S *consiste di una quantità al più numerabile di numeri complessi* $\{\lambda_i\}_{i \in I}$. *L'unico possibile punto di accumulazione è* 0.
- *Ogni* λ_i *non nullo è un autovalore di* S *di finita* molteplicità, *cioé per ogni* $\lambda = \lambda_i$
  - $\ker S - \lambda I$ *è finito-dimensionale;*
  - *esiste un intero* j *tale che* $\ker(S - \lambda I)^j = \ker(S - \lambda I)^i$ *per ogni* $i > j$.

Dimostrazione. Per $\mu \neq 0$, definiamo $T = I - \mu^{-1}S$. Segue dal Teorema 2.8 che se $\ker T = (0)$, allora $\operatorname{ran} T = X$. Questo mostra che ogni elemento non nullo dello spettro è un autovalore. L'affermazione sulla molteplicità segue direttamente dal Teorema 2.6.

Mostriamo che 0 è l'unico punto di accumulazione. Consideriamo una successione di autovalori $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tale che $\lambda_n \neq \lambda_m$ quando $n \neq m$. Denotiamo i relativi autovettori con x_n:

$$Sx_n = \lambda_n x_n$$

Definiamo $Y_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Dal momento che autovettori relativi a distinti autovalori sono linearmente indipendenti, abbiamo che Y_{n-1} è un sottospazio proprio di Y_n. Applichiamo ancora una volta il Lemma 1.11. Troviamo $y_n \in Y_n$ tale che

$$\|y_n\| = 1 \text{ e } \|y_n - y\| \geqslant \frac{1}{2} \quad \forall y \in Y_{n-1} \tag{2.16}$$

Per definizione, y_n è della forma

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Quindi

$$Sy_n - \lambda_n y_n = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_n)\alpha_i x_i \in Y_{n-1}$$

Questo mostra che per $n > m$ si ha

$$Sy_n - Sy_m = \lambda_n y_n - y, \quad y \in Y_{n-1}$$

Ora utilizziamo 2.16:

$$\|Sy_n - Sy_m\| \geqslant \frac{|\lambda_n|}{2}$$

Dal momento che S mappa la palla unitaria in un insieme relativamente compatto, possiamo avere solamente un numero finito di indici per cui, fissato $\delta > 0$, si ha $|\lambda_n| > \delta$. □

3 TEOREMA SPETTRALE

In questo capitolo introduciamo alcuni risultati fondamentali della teoria degli operatori.

3.1 TEOREMA DI GELFAND-NAIMARK

Il Teorema di Gelfand-Naimark, talvolta detto Teorema spettrale "astratto", sarà il risultato fondamentale di questo capitolo, e giocherà un ruolo centrale nella produzione di sottospazi invarianti per una certa classe di operatori lineari.

3.1.1 Teorema di Stone-Weierstrass

Uno strumento essenziale per le dimostrazioni che seguiranno è il Teorema di Stone-Weierstrass, che proveremo in questa sottosezione.

Premettiamo alcune considerazioni di carattere generale; indichiamo con X uno spazio topologico, definiamo $C(X) = \{f\colon X \to \mathbb{R} : f \text{ è continua}\}$, e la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X}|f(x)|$. Si verifica immediatamente che $C(X)$ è un'algebra se dotata della moltiplicazione $fg(x) = f(x)g(x)$. Il teorema che dimostreremo dice che le funzioni di $C(X)$ (con alcune ipotesi su X) possono essere approssimate *uniformemente* da funzioni appartenenti a una sottoalgebra con certi requisiti. La seguente *disuguaglianza di Bernoulli* verrà utilizzata ripetutamente:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad x \geqslant -1, n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

Teorema 3.1 (Stone-Weierstrass)**.** *Sia X uno spazio topologico compatto di Hausforff e A una sottoalgebra di $C(X)$. Se A contiene le costanti e separa i punti, allora è densa.*

Osservazione 3.2. Se ad esempio $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, una sottoalgebra che soddisfa le ipotesi del Teorema 3.1 è quella dei polinomi.

La richiesta di "contenere le costanti" è necessaria poiché è possibile dare una definizione di algebra omettendo la richiesta che una unità esista.

Notazione. Il coniugato di $z \in \mathbb{C}$ è $\bar{z}$, la sua parte reale è $\Re(z)$, la sua parte immaginaria è $\Im(z)$.

La dimostrazione (estratta da [3]) risulta scomposta in due lemmi.

Lemma 3.3. *Sia $x_0 \in X$ e U un intorno di x_0. Allora esiste un intorno V di x_0, $V \subseteq U$, con la seguente proprietà. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $f \in A$ tale che*

- $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ *per ogni* $x \in X$;
- $f(x) < \varepsilon$ *per ogni* $x \in V$;

- $f(x) > 1 - \varepsilon$ *per ogni* $x \in X \setminus V$.

Dimostrazione. Per ogni $x \in X \setminus U$, la proprietà di separazione dei punti implica l'esistenza di una funzione $g_x \in A$ con $g_x(x) \neq g_x(x_0)$. Allora la funzione $h_x = g_x - g_x(x_0)$ appartiene ad A e $h_x(x) \neq h_x(x_0) = 0$. La funzione $p_x = (1/\|h_x^2\|_\infty)h_x^2$ è in A e soddisfa $p_x(x_0) = 0, p_x(x) > 0$ e $0 \leqslant p_x \leqslant 1$.

Sia $U(x) = \{y \in X : p_x(y) > 0\}$. Allora $U(x)$ è un intorno di x. Per compattezza di $X \setminus U$, esiste un numero finito di punti $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ in $X \setminus U$ tali che $X \setminus U \subseteq \cup_{i=1}^m U(x_i)$. Sia $p = (1/m)\sum_{i=1}^m p_{x_i}$; si ha $p \in A, 0 \leqslant p \leqslant 1, p(x_0) = 0$, e $p > 0$ su $X \setminus U$. Ancora per compattezza di $X \setminus U$, esiste $0 < \delta < 1$ tale che $p \geqslant \delta$ su $X \setminus U$. Definiamo $V = \{x \in X : p(x) < \delta/2\}$; allora V è un intorno di x_0 e $V \subseteq U$.

Sia k il minimo intero maggiore di $1/\delta$. Allora $k - 1 \leqslant 1/\delta$ che implica $k \leqslant (1+\delta)/\delta \leqslant 2/\delta$. Dunque $1 < k\delta < 2$. Consideriamo le funzioni q_n definite da

$$q_n(x) = [1 - p^n(x)]^{k^n} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

Chiaramente $q_n \in A, 0 \leqslant q_n \leqslant 1$, e $q_n(x_0) = 1$. Per ogni $x \in V$, $kp(x) < k\delta/2 < 1$ e quindi (grazie a 3.1),

$$q_n(x) \geqslant 1 - [kp(x)]^n \geqslant 1 - \left(k\frac{\delta}{2}\right)^n \to 1$$

uniformemente su V. Per ogni $x \in X \setminus U$, $kp(x) \geqslant k\delta > 1$ e quindi usando ancora 3.1,

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \frac{1}{k^n p^n(x)}[1 - p^n(x)]^{k^n} k^n p^n(x) \leqslant \frac{1}{[kp(x)]^n}[1 - p^n(x)]^{k^n}[1 + k^n p^n(x)] \\ &\leqslant \frac{1}{[kp(x)]^n}[1 - p^n(x)]^{k^n}[1 + p^n(x)]^{k^n} = \frac{1}{[kp(x)]^n}[1 - p^{2n}(x)]^{k^n} \\ &\leqslant \frac{1}{(k\delta)^n} \to 0 \end{aligned}$$

uniformemente su $X \setminus U$.

Allora per n abbastanza grande, la funzione q_n ha la proprietà $0 \leqslant q_n \leqslant 1, q_n < \varepsilon$ su $X \setminus U$, e $q_n > 1 - \varepsilon$ su V. La tesi segue prendendo $f = 1 - q_n$. □

Lemma 3.4. *Siano* B *e* C *chiusi disgiunti di* X. *Allora per ogni* $0 < \varepsilon < 1$, *esiste* $f \in A$ *tale che*

- $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ *per ogni* $x \in X$;
- $f(x) < \varepsilon$ *per ogni* $x \in B$;
- $f(x) > 1 - \varepsilon$ *per ogni* $x \in C$.

Dimostrazione. Sia $U = X \setminus C$. Per ogni $x \in B$, si scelga l'intorno $V(x)$ di x come nel Lemma 3.3. Allora esiste un insieme finito di punti $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ in B tali che $B \subseteq \cup_{i=1}^m V(x_i)$. Per la scelta dei $V(x_i)$, esistono delle funzioni $f_i \in A$ con $0 \leqslant f_i \leqslant 1, f_i < \varepsilon/m$ su $V(x_i)$, e $f_i > 1 - \varepsilon/m$ su $X \setminus U = C$. Allora la funzione $f = f_1 \cdots f_m$ è in A, $0 \leqslant f \leqslant 1, f < \varepsilon/m \leqslant \varepsilon$ su $\cup_{i=1}^m V(x_i) \supseteq B$, e (usando 3.1) $f > (1 - \varepsilon/m)^m \geqslant 1 - \varepsilon$ su C. □

Ora siamo pronti per dimostrare il Teorema 3.1.

Dimostrazione (del Teorema di Stone-Weierstrass). Sia $f \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$. Per completare la prova, è sufficiente esibire una funzione $g \in A$ tale che

$$|f(x) - g(x)| < 2\varepsilon$$

Se mettiamo $f + \|f\|_\infty$ in luogo di f, possiamo assumere $f \geqslant 0$. Possiamo anche assumere $\varepsilon < 1/3$. Scegliamo un intero n tale che $(n-1)\varepsilon \geqslant \|f\|_\infty$. Definiamo gli insiemi B_i, C_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ in questo modo:

$$B_i = \{x \in X : f(x) \leqslant \left(i - \tfrac{1}{3}\right)\varepsilon\}, \quad C_i = \{x \in X : f(x) \geqslant \left(i + \tfrac{1}{3}\right)\varepsilon\}$$

Si osservi che B_i e C_i sono insiemi disgiunti e chiusi, $\emptyset = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_n = X$ e $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \cdots \supseteq C_n = \emptyset$. Per ogni $i = 0, 1, \dots, n$, il Lemma 3.4 implica che esiste $f_i \in A$, con $0 \leqslant f_i \leqslant 1$, $f_i < \varepsilon/n$ su B_i, e $f_i > 1 - \varepsilon/n$ su C_i.

Allora la funzione $g = \varepsilon \sum_{i=0}^n f_i$ è in A. Per ogni $x \in X$, abbiamo $x \in B_i \setminus B_{i-1}$ per qualche $i \geqslant 1$ e quindi

$$\left(i - \tfrac{4}{3}\right)\varepsilon < f(x) \leqslant \left(i - \tfrac{1}{3}\right)\varepsilon$$

e anche

$$f_j(x) < \frac{\varepsilon}{n} \qquad \forall j \geqslant i \tag{3.2}$$

Inoltre, $x \in C_j$ per ogni $j \leqslant i - 2$ implica che

$$f_j(x) > 1 - \varepsilon/n \qquad \forall j \leqslant i - 2 \tag{3.3}$$

Usando 3.2, otteniamo

$$\begin{aligned} g(x) &= \varepsilon \sum_{j=0}^{i-1} f_j(x) + \varepsilon \sum_{j=i}^{n} f_j(x) \\ &\leqslant i\varepsilon + \varepsilon(n - i + 1)\frac{\varepsilon}{n} \leqslant i\varepsilon + \varepsilon^2 \leqslant \left(i + \tfrac{1}{3}\right)\varepsilon \end{aligned}$$

Usando 3.3, otteniamo per $i \geqslant 2$

$$\begin{aligned} g(x) &\geqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{i-2} f_j(x) \geqslant (i-1)\varepsilon\left(1 - \tfrac{\varepsilon}{n}\right) \\ &= (i-1)\varepsilon - \frac{i-1}{n}\varepsilon^2 > (i-1)\varepsilon - \varepsilon^2 > \left(i - \tfrac{4}{3}\right)\varepsilon \end{aligned}$$

Ovviamente $g(x) > (i - \frac{4}{3})\varepsilon$ quando $i = 1$. Dunque

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \left(i + \tfrac{1}{3}\right)\varepsilon - \left(i - \tfrac{4}{3}\right)\varepsilon < 2\varepsilon$$

□

Corollario 3.5. *Sia* X *uno spazio topologico compatto e di Hausdorff e definiamo* $C(X) = \{f \colon X \to \mathbb{C} : f$ *è continua*$\}$ *(i.e., l'algebra delle funzioni continue* a valori complessi*). Sia* A *una sottoalgebra complessa tale che*

- A *contiene le costanti;*
- A *separa i punti;*
- $f \in A \implies \bar{f} \in A$.

Allora A *è densa in* $C(X)$.

Dimostrazione. Sia $f \in A$. Allora, $\Re(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in A$ e $\Im(f) = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \in A$. Denotiamo con $A_{\mathbb{R}}$ la sotto-algebra (reale) di A contenente tutte le funzioni a valori reali. Si osservi che $A_{\mathbb{R}}$ separa i punti poiché A possiede questa proprietà. Allora grazie al Teorema 3.1 possiamo dire che $A_{\mathbb{R}}$ è densa in $C_{\mathbb{R}}(X) = \{f \colon X \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$.

Dato che $A = \{f + ig : f, g \in A_{\mathbb{R}}\}$, vediamo che A è densa in $C(X) = C_{\mathbb{R}}(X) + iC_{\mathbb{R}}(X)$. □

3.1.2 Trasformata di Gelfand

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto le algebre di Banach, cioè spazi di Banach dotati di una operazione di moltiplicazione che soddisfa certe proprietà. Ora vogliamo studiare tali algebre nel caso in cui la moltiplicazione sia *commutativa*.

Notazione. Adottiamo le seguenti notazioni:

- A è un'algebra di Banach commutativa;
- Δ denota la famiglia degli omomorfismi complessi di A;

Definizione 3.6. Un *ideale* J è un sottospazio vettoriale di A tale che per ogni $x \in J$ e $y \in A$ si ha $xy \in J$. L'ideale $J \subsetneq A$ si dirà *massimale* se l'unico ideale che lo contiene propriamente è l'algebra stessa.

Osserviamo che il gruppo degli elementi invertibili $G(A)$ è aperto, e ogni ideale *proprio* soddisfa $J \cap G(A) = \emptyset$. Inoltre, la chiusura di un ideale proprio è disgiunta da $G(A)$ e dunque costituisce ancora un ideale proprio; ne segue che gli ideali massimali sono chiusi.

Proposizione 3.7. *Sia* J *un ideale massimale. La* proiezione canonica $\pi \colon A \to A/J$ *tale che* $\pi(x) = [x]$ *ha norma unitaria.*

Dimostrazione. Dalla definizione di norma quoziente (data nel capitolo precdente) segue $\|\pi(x)\| = \inf\{\|x - y\| : y \in J\} = d(x, J)$. Scegliendo $y = 0$ si ottiene $\|\pi\|_{op} \leqslant 1$. Allora, dal Lemma 1.11 segue che possiamo costruire una successione di vettori unitari tale che $1 - \frac{1}{n} \leqslant d(x_n, J) \leqslant 1$. Passando al limite si ha la tesi. □

Il prossimo lemma è una semplice applicazione del Lemma di Zorn.

Lemma 3.8 (Krull)**.** *Ogni ideale è contenuto in un ideale massimale.*

Teorema 3.9.

- J *è un ideale massimale di* A *se e solo se è il nucleo di qualche* $\varphi \in \Delta$*;*
- $\|\varphi\|_{op} = 1$ *per ogni* $\varphi \in \Delta$*;*

- $\lambda \in \sigma(x)$ *se e solo se* $\varphi(x) = \lambda$ *per qualche* $\varphi \in \Delta$.

Dimostrazione. Se $x \in A$ è tale che $\pi(x) \neq 0$, in modo che $x \notin J$, definiamo

$$M = \{ax + y : a \in A \text{ e } y \in J\}$$

Vediamo che M è un ideale di A tale che $J \subsetneq M$. Deve essere $M = A$, in particolare possiamo trovare a e y tali che

$$ax + y = e$$

Dunque $\pi(a)\pi(x) = \pi(e)$, cioè $\pi(x)$ è invertibile. Segue dal Corollario 2.18 che A/J è isomorfa a $\mathbb{C}$, e π definisce un omomorfismo complesso con nucleo J. Questo stabilisce la prima parte del primo asserto.

Ora mostriamo che, preso $\varphi \in \Delta$, si ha che $\varphi^{-1}(0)$ è un ideale massimale. D'altra parte, se $J \supseteq \varphi^{-1}(0)$, e se c'è un $x \in J$ con $\varphi(x) \neq 0$, allora preso $y \in A$ abbiamo che $y - \varphi(y)\varphi(x)^{-1}x \in \varphi^{-1}(0) \subseteq J$. Ne segue che $y \in J$, e che $J = A$.

La seconda parte segue dalla prima, e dal fatto che le proiezioni al quoziente hanno norma 1.

Per la terza parte, abbiamo visto nella Proposizione 2.12 che $x \in G(A)$ implica $\varphi(x) \neq 0$ per ogni $\varphi \in \Delta$. Se $x \notin G(A)$, allora $J = \{ax : a \in A\}$ è un ideale proprio. Per il Lemma di Krull J è contenuto in un ideale massimale, cioè $J \subseteq \ker\varphi$ per qualche $\varphi \in \Delta$. Dunque abbiamo mostrato che $x \in G(A)$ se e solo se $\varphi(x) \neq 0$ per ogni $\varphi \in \Delta$. L'asserto segue ponendo $\lambda e - x$ al posto di x. $\square$

Definizione 3.10. Per ogni $x \in A$ la *trasformata di Gelfand* di x è la funzione $\hat{x} \colon \Delta \to \mathbb{C}$ definita da $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$. La *topologia di Gelfand* è la topologia iniziale su Δ relativa alla famiglia $\{\hat{x}\}_{x \in A}$. Lo spazio $\Delta = \Delta(A)$ dotato di tale topologia si dice *spazio ideale massimale* di A.

Se lo spazio topologico X possiede la topologia iniziale relativa alla famiglia $\mathcal{F}$, la topologia di sottospazio per $Y \subseteq X$ non è altro che la topologia iniziale relativa a $\mathcal{F}|_Y = \{f|_Y : f \in \mathcal{F}\}$. Questa osservazione sarà utile nel prossimo teorema.

Teorema 3.11. *Sia Δ lo spazio ideale massimale di A. Allora Δ è uno spazio compatto di Hausdorff (con la topologia di Gelfand), e la trasformata di Gelfand è un omomorfismo da A in $C(\Delta) = \{f \colon \Delta \to \mathbb{C} : f \text{ è continua}\}$, il cui nucleo è dato da*

$$\operatorname{rad} A = \bigcap \{J : J \textit{ è un ideale massimale di } A\}$$

Inoltre, $\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x)$.

Dimostrazione. Abbiamo che $\hat{x} \in C(\Delta)$ per definizione, ed è semplice verficare che $x \mapsto \hat{x}$ è un omomorfismo algebrico. Dato che $\hat{x} = 0$ se e solo se $\varphi(x) = 0$ per ogni $\varphi \in \Delta$, la formula per $\operatorname{rad} A$ segue dalla prima parte del Teorema 3.9. La formula per $\|\hat{x}\|_\infty$ segue dalla terza parte dello stesso teorema. Dunque dobbiamo solo verificare che Δ è compatto e di Hausdorff.

D'altra parte, $B^* = \{\Lambda \in A^* : \|\Lambda\|_{op} \leqslant 1\}$ è $*$-debolmente compatto grazie al Teorema di Banach-Alaoglu, e $\Delta \subseteq B^*$. Inoltre abbiamo visto che la topologia di Gelfand non è altro che la restrizione della topologia $*$-debole a Δ. Allora ci siamo ridotti a dimostrare che Δ è chiuso in B^*. Sia $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ una rete convergente a $\Lambda \in B^*$. Allora $\varphi_i(x) \to \Lambda(x)$ per ogni $x \in A$. Ne segue $\Lambda(e) = 1$ e $\Lambda(xy) = \lim_i \varphi_i(xy) = \Lambda(x)\Lambda(y)$, cioè $\Lambda \in \Delta$. $\square$

È il momento di introdurre una importante definizione.

Definizione 3.12. La coppia $(A, x \mapsto x^*)$ si chiama *$*$-algebra di Banach* se A è un'algebra di Banach e la mappa $x \mapsto x^*$ soddisfa le seguenti condizioni:

- $x^{**} = x$;
- $(xy)^* = y^*x^*$;
- $(x + \alpha y)^* = x^* + \bar{\alpha} y^*$;
- $\|x^*\| = \|x\|$.

per ogni $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Se inoltre vale $\|x^*x\| = \|x\|^2$ per ogni $x \in A$, allora parleremo di *C^*-algebra*.

Definizione 3.13. Se A e B sono $*$-algebre di Banach allora l'omomorfismo $\Phi \colon A \to B$ si chiama *$*$-omomorfismo* se $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$ per ogni $x \in A$.

Osservazione 3.14. Supponiamo che X sia uno spazio di Hausdorff compatto. Allora $A = C(X) = \{f \colon X \to \mathbb{C} : f \text{ è continua}\}$ è una C^*-algebra. È sufficiente definire $fg(x) = f(x)g(x)$ e $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Risulta $\|f^*f\|_\infty = \||f|^2\|_\infty = \|f\|_\infty^2$.

Teorema 3.15 (Teorema spettrale astratto)**.** *Sia A una C^*-algebra commutativa. Allora la trasformata di Gelfand è uno $*$-isomorfismo isometrico $A \to C(\Delta)$.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \Delta$. Per prima cosa dimostriamo che $\widehat{x^*} = \bar{\hat{x}}$, cioè $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$. Dato che ogni $x \in A$ uguaglia $\frac{x+x^*}{2} - i\frac{ix+(ix)^*}{2}$, ogni $x \in A$ può essere scritto nella forma $x_1 + ix_2$ con $x_i^* = x_i$ per $i = 1, 2$. Così, è sufficiente mostrare che $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ quando $x = x^*$.

Per questo fine, supponiamo $t \in \mathbb{R}$. Definiamo

$$u_t = \exp(itx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!}$$

Si verifica facilmente che $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, e che $u_t^* = \exp(-itx)$. Allora,

$$\|u_t\|^2 = \|u_t^* u_t\| = \|\exp(-itx + itx)\| = \|\exp(0)\| = 1$$

Dato che $\|\varphi\|_{\text{op}} = 1$,

$$\exp(t\mathfrak{R}(i\varphi(x))) = \exp(\mathfrak{R}(it\varphi(x))) = |\exp(it\varphi(x))| = |\varphi(u_t)| \leqslant 1$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Concludiamo che $\varphi(x) \in \mathbb{R}$.

Ora mostriamo che $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$. Grazie al Teorema 3.11 sappiamo che $\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$. Ma se $x = x^*$, una semplice induzione mostra che

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|x^2\| \implies \|x\|^{2^n} = \|x^{2^n}\|$$

Dunque, $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \|x\|$, poiché sappiamo grazie al Teorema 2.17 che il limite esiste, quindi basta controllare una sottosuccessione. In generale,

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|\bar{\hat{x}}\hat{x}\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2$$

La mappa $x \mapsto \hat{x}$ è uno $*$-isomorfismo isometrico da A in una sottoalgebra di $C(\Delta)$. Tale sottoalgebra risulta chiusa poichè A è completa e $x \mapsto \hat{x}$ è una isometria. Inoltre, tale sottoalgebra contiene le costanti, è chiusa rispetto alla coniugazione, e separa i punti di Δ. Possiamo allora concludere grazie al Corollario 3.5. $\square$

In generale, se A è un'algebra di Banach e B una sua sottoalgebra, si vede facilmente che

$$\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$$

vale a dire, lo spettro di x come elemento di A è contenuto nello spettro di x visto come elemento dell'algebra B. Il prossimo teorema mostra come, nel caso delle C^*-algebre, l'inclusione non sia *mai* propria.

Teorema 3.16 (Permanenza spettrale)**.** *Sia B una C^*-sottoalgebra della C^*- algebra A. Allora per ogni $x \in B$ si ha $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

Dimostrazione. Fissiamo $x \in B$. È sufficiente mostrare che $x \in G(A)$ implica $x^{-1} \in B$. Mostriamo che possiamo ridurci a dimostrare tale asserto nel caso in cui valga $x = x^*$. Osserviamo che $x \in G(A)$ implica $x^* \in G(A)$ e dunque $x^*x \in G(A)$. Così, $(x^*x)^{-1}x^*$ è un inverso sinistro per x, e dal momento che x^{-1} esiste, si deve avere $x^{-1} = (x^*x)^{-1}x^*$. Quindi, basta mostrare che $(x^*x)^{-1} \in B$ quando $x \in B$.

Sia C la C^*-sottoalgebra generata da x e x^{-1} (cioè l'intersezione di tutte le C^*-sottoalgebre *chiuse* contenenti tali elementi), e sia D la $*$-sottoalgebra generata da e e x. Dato che $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1} = x^{-1}$, C è commutativa. Allora per il Teorema 3.15 abbiamo che C è isomorfa a $C(\Delta)$, e $C(\Delta)$ è generata dalle funzioni $\hat{x}$ e $\hat{y} = 1/\hat{x}$ (poiché $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = 1$ per ogni $\varphi \in \Delta$). L'immagine di D in $C(\Delta)$ è generata da 1 e $\hat{x}$. D'altra parte se $\hat{x}(\varphi) = \hat{x}(\varphi')$, allora $\hat{y}(\varphi) = \hat{y}(\varphi')$. Ne segue che $\hat{x}$ separa i punti di Δ. Conludiamo $D = C$ per il Corollario 3.5; in particolare $x^{-1} \in D \subseteq B$. $\square$

3.2 SPAZI DI HILBERT

In questa sezione riassumiamo le proprietà fondamentali degli spazi di Hilbert; per una introduzione più dettagliata si può consultare [5, Cap. 1-2]. Inoltre, descriviamo una speciale classe di operatori che sarà oggetto di studio delle prossime pagine.

Notazione. Se $\mathcal{H}$ indica uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{C}$, adottiamo le seguenti notazioni:

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il *prodotto interno (hermitiano)* di $\mathcal{H}$;
- Scriveremo $x \perp y$ in luogo di $\langle x, y \rangle = 0$, e diremo che x e y sono *ortogonali*;

La seguente proposizione riassume alcune semplici proprietà del prodotto scalare.

Proposizione 3.17. *Valgono le seguenti:*

- $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$;
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$;
- *Se $x_1, \ldots, x_n$ sono ortogonali a due a due,* $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$.

3.2.1 Proiezioni ortogonali

Definizione 3.18. $K \subseteq \mathcal{H}$ è *convesso* se, presi $x, y \in K$ e $t \in [0,1]$, si ha $tx + (1-t)y \in K$.

I prossimi due teoremi sono semplici e importanti conseguenze delle proprietà descritte in Proposizione 3.17.

Teorema 3.19. *Se $K \subseteq \mathcal{H}$ è un insieme convesso non vuoto e $x \in \mathcal{H}$, allora esiste ed è unico k_0 in K tale che*

$$\|x - k_0\| = \inf_{k \in K} \|x - k\| = d(x, K)$$

Teorema 3.20. *Se $M \subseteq \mathcal{H}$ è un sottospazio chiuso, $x \in \mathcal{H}$, e m_0 è l'unico elemento di M tale che $\|x - m_0\| = d(x, M)$, allora $x - m_0 \perp M$, cioè $x - m_0 \perp y$ per ogni $y \in M$. Al contrario, se $m_0 \in M$ è tale che $x - m_0 \perp M$, allora $\|x - m_0\| = d(x, M)$.*

Teorema 3.21. *Sia M un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ e $x \in \mathcal{H}$, denotiamo con Px l'unico punto di M tale che $x - Px \perp M$.*

1. *$P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$;*
2. *$\|Px\| \leqslant \|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{H}$;*
3. *$P^2 = P$;*
4. *$\ker P = M^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : x \perp M\}$ e $\operatorname{ran} P = M$.*

Dimostrazione.

1. Siano $x, y \in \mathcal{H}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Se $z \in M$, allora $\langle (\alpha x + \beta y) - (\alpha Px + \beta Py), z\rangle = \alpha\langle x - Px, z\rangle + \beta\langle y - Py, z\rangle = 0$. Per unicità, si deve avere $\alpha Px + \beta Py = P(\alpha x + \beta y)$;
2. Se $x \in \mathcal{H}$, $x = (x - Px) + Px$ e ovviamente $(x - Px) \perp Px$. Dunque $\|x\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2 \geqslant \|Px\|^2$;
3. Se $y \in M$, allora $Py = y$. Quindi $P^2x = P(Px) = Px$ poiché $Px \in M$;
4. Se $Px = 0$, allora $x = x - Px \in M^{\perp}$. Al contrario, se $x \in M^{\perp}$, allora 0 è l'unico vettore tale che $x = x - 0 \perp M$. Cioè $Px = 0$. L'affermazione su $\operatorname{ran} P$ è chiara.

□

Definizione 3.22. Se M è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ e P è la mappa lineare definita nel teorema precedente, allora chiameremo $P = P_M$ la *proiezione ortogonale* di $\mathcal{H}$ su M.

Corollario 3.23. *Se M è un sottospazio chiuso, vale $(M^{\perp})^{\perp} = M$.*

Dimostrazione. Se $P = P_M$, allora l'operatore $I - P$ è la proiezione ortogonale di $\mathcal{H}$ sul sottospazio $M^{\perp}$. Per quanto visto nell'ultima parte del teorema precedente, si ha $(M^{\perp})^{\perp} = \ker I - P$. Ma $0 = x - Px = (I - P)x$ se e solo se $x = Px$, cioè $x \in \operatorname{ran} P = M$. □

Corollario 3.24. *Se* M *è un sottospazio chiuso, vale* $\mathcal{H} = M \bigoplus M^{\perp}$*, cioè* $M \cap M^{\perp} = (0)$ *e* $\mathcal{H} = M + M^{\perp}$.

Dimostrazione. Se x appartiene all'intersezione allora per definizione $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0$, da cui deduciamo che i sottospazi sono disgiunti. Inoltre ogni $x \in \mathcal{H}$ ammette una scrittura del tipo $x = (x - P_M x) + P_M x$. □

Se fissiamo $x \in \mathcal{H}$, possiamo definire un funzionale lineare e continuo $\Lambda_x \in \mathcal{H}^*$ tramite $\Lambda_x(y) = \langle y, x \rangle$. Abbiamo $|\Lambda_x(y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ e anche $\Lambda_x(\frac{x}{\|x\|}) = \|x\|$. Cioè $\|\Lambda_x\|_{\text{op}} = \|x\|$. Il prossimo risultato mostra come ogni elemento nel duale possa essere costruito con questo procedimento.

Teorema 3.25 (Riesz-Fréchet)**.** *La mappa* $\Phi \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ *definita da* $\Phi(x) = \Lambda_x$ *è un anti-isomorfismo isometrico. Il prefisso* anti *indica la proprietà* $\Phi(\alpha x) = \bar{\alpha}\Phi(x)$.

Dimostrazione. Grazie alla discussione precedente dobbiamo solamente far vedere che ogni $\Lambda \in \mathcal{H}^*$ agisce come $\langle y, x \rangle$ per qualche $x \in \mathcal{H}$. Sia $M = \ker \Lambda$. Dato che Λ è continuo, M è un sottospazio chiuso e possiamo assumere $M^{\perp} \neq (0)$. Esiste un vettore $y_0 \in M^{\perp}$ tale che $\Lambda y_0 = 1$. Se $y \in \mathcal{H}$ e $\alpha = \Lambda y$ abbiamo $\Lambda(y - \alpha y_0) = \Lambda y - \alpha = 0$, cioè $y - (\Lambda y) y_0 \in M$. Allora,

$$0 = \langle y - (\Lambda y) y_0, y_0 \rangle = \langle y, y_0 \rangle - \Lambda y \|y_0\|^2$$

Dunque possiamo scegliere $x = \|y_0\|^{-2} y_0$. Se esistesse x' con la stessa proprietà, avremmo $\langle y, x \rangle = \langle y, x' \rangle$ per ogni y. In particolare $\langle y, x - x' \rangle = 0$ e scegliendo $y = x - x'$ si ottiene l'unicità. □

3.2.2 Operatori aggiunti, operatori normali, proiettori

Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, il funzionale $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ è lineare e continuo, e quindi per il Teorema 3.25 deve esistere $T^* y$ tale che $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$. Non è difficile verificare che $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Definizione 3.26. Dato $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, l'operatore T^* definito sopra si dice *operatore aggiunto*.

Osservazione 3.27. A volte si preferisce chiarire che T^* è l'operatore aggiunto *dello spazio di Hilbert* di T, per distinguerlo dall'operatore aggiunto per spazi di Banach, che abbiamo definito nel primo capitolo. L'unica differenza tra le due definizioni sta nel fatto che nel caso dello spazio di Hilbert si ha $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$, ossia la presenza di un coniugato. La ragione di questo fatto dovrebbe essere chiara alla luce della natura antilineare dell'isomorfismo dato nel Teorema 3.25.

Proposizione 3.28. *Se* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$*, allora* $\|T\| = \|T^*\| = \|T^* T\|^{1/2}$.

Dimostrazione. Preso $x \in \mathcal{H}$ di norma unitaria, abbiamo

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^* Tx, x \rangle \leqslant \|T^* Tx\| \|x\| \leqslant \|T^* T\|_{\text{op}} \leqslant \|T^*\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}}$$

Dunque $\|T\|_{\text{op}} \leqslant \|T^*\|_{\text{op}}$ se dividiamo per $\|T\|_{\text{op}}$. Dato che $T^{**} = T$, la tesi segue ripetendo la dimostrazione con T^* al posto di T. □

Definizione 3.29. Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

- T è *hermitiano* o *autoaggiunto* se $T = T^*$;
- T è *normale* se $TT^* = T^*T$, cioè se commuta con l'aggiunto.

Definizione 3.30. Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

- T è *idempotente* se $T^2 = T$;
- T è un *proiettore* se è idempotente e $\ker T = (\operatorname{ran} T)^\perp$.

Teorema 3.31. *Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ idempotente, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *T è un proiettore;*
2. *T è la proiezione ortogonale di $\mathcal{H}$ su $\operatorname{ran} T$;*
3. *$\|T\|_{op} = 1$;*
4. *T è hermitiano;*
5. *T è normale;*
6. *T è un operatore* positivo, *cioè $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathcal{H}$.*

Dimostrazione. ($1 \Rightarrow 2$): Sia $M = \operatorname{ran} T$ e $P = P_M$. Se $x \in \mathcal{H}$, Px è l'unico vettore di M tale che $x - Px \in M^\perp = (\operatorname{ran} T)^\perp = \ker T$. Ma $x - Tx = (I - T)x \in \ker T$. Quindi $Tx = Px$ per unicità.

($2 \Rightarrow 3$): Grazie al Teorema 3.21, abbiamo $\|T\|_{op} \leqslant 1$; d'altronde se $x \in \operatorname{ran} T$ allora $Tx = x$, cioè $\|T\|_{op} = 1$.

($3 \Rightarrow 1$): Sia $x \in (\ker T)^\perp$. Abbiamo $\operatorname{ran}(I - T) = \ker T$, cioè $x - Tx \in \ker T$. Ne segue che $0 = \langle x - Tx, x\rangle = \|x\|^2 - \langle Tx, x\rangle$. Allora $\|x\|^2 = \langle Tx, x\rangle \leqslant \|Tx\|\|x\| \leqslant \|x\|^2$. Dunque per $x \in (\ker T)^\perp$ abbiamo $\|Tx\| = \|x\| = \langle Tx, x\rangle^{1/2}$. Ciò signfica che per $x \in (\ker T)^\perp$,

$$\|x - Tx\|^2 = \|x\|^2 - 2\Re\langle Tx, x\rangle + \|Tx\|^2 = 0$$

Cioè, $(\ker T)^\perp \subseteq \ker(I - T) = \operatorname{ran} T$. D'altro canto, se $x \in \operatorname{ran} T$, allora possiamo scrivere $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \ker T$ e $x_2 \in (\ker T)^\perp$. Allora $x = Tx = Tx_2 = x_2$, cioè $\operatorname{ran} T \subseteq (\ker T)^\perp$. In conclusione $\operatorname{ran} T = (\ker T)^\perp$ e T è un proiettore.

($2 \Rightarrow 6$): Se $x \in \mathcal{H}$, scriviamo $x = x_1 + x_2$ dove $x_1 \in \operatorname{ran} T$ e $x_2 \in \ker T = (\operatorname{ran} T)^\perp$. Allora $\langle Tx, x\rangle = \langle Tx_1, x_1\rangle = \langle x_1, x_1\rangle = \|x_1\|^2 \geqslant 0$.

($6 \Rightarrow 1$): Siano x_1 in $\operatorname{ran} T$ e x_2 in $\ker T$. Allora $0 \leqslant \langle T(x_1 + x_2), x_1 + x_2\rangle = \langle x_1, x_1\rangle + \langle x_1, x_2\rangle$. Quindi $-\|x_1\|^2 \leqslant \langle x_1, x_2\rangle$. Se $\langle x_1, x_2\rangle = \bar{\alpha} \neq 0$, allora sosituendo $-2\alpha^{-1}\|x_1\|^2 x_2$ al posto di x_2 nella disuguaglianza precedente si ottiene $-\|x_1\|^2 \leqslant -2\|x_1\|^2$, cioè una contraddizione. Allora deve essere $\langle x_1, x_2\rangle = 0$ ogniqualvolta $x_1 \in \operatorname{ran} T$ e $x_2 \in \ker T$, vale a dire T è un proiettore.

($1 \Rightarrow 4$): Siano $x, y \in \mathcal{H}$ tali che $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$, dove $x_1, y_1 \in \operatorname{ran} T$, e $x_2, y_2 \in \ker T = (\operatorname{ran} T)^\perp$. Allora $\langle Tx, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle$; ma anche $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = \langle Tx, y\rangle$. Concludiamo che $T = T^*$.

($4 \Rightarrow 5$): Chiaro.

($5 \Rightarrow 1$): $\|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle$, da cui se T è normale si ha $\|Tx\| = \|T^*x\|$ che implica $\ker T = \ker T^*$. Abbiamo concluso se dimostriamo che $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$. Preso $x \in \ker T^*$ e $y \in \mathcal{H}$ abbiamo $\langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle = 0$, cioè $\ker T^* \subseteq (\operatorname{ran} T)^\perp$. D'altronde se $x \perp \operatorname{ran} T$ allora $\langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle = 0$, cioè $x \in \ker T^*$; in ultima analisi, $(\operatorname{ran} T)^\perp \subseteq \ker T^*$. □

3.2.3 Applicazioni del Teorema spettrale astratto

In questa sottosezione ci concentriamo sull'esempio fondamentale di C^*-algebra, cioè una sottoalgebra chiusa di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ che contenga tutti gli operatori aggiunti. In particolare, se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ è normale, allora la chiusura dell'algebra generata da I, T, T^* è una C^*-algebra commutativa.

Cominciamo con l'osservare che grazie al Teorema 3.16 siamo in grado di parlare senza ambiguità dello spettro di un operatore $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, posto che tale spettro sia sempre calcolato rispetto a qualche C^*-sottoalgebra. Direttamente dal Teorema di Gelfand-Naimark discende la seguente osservazione, così importante da meritare un nome.

Osservazione 3.32 (Calcolo funzionale continuo). Sia T un operatore normale di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, e indichiamo con A la C^*-algebra generata da I, T, T^*. Dal Teorema 3.15 sappiamo che A è isomorfa a $C(\Delta)$ via la trasformata di Gelfand. Ma $\widehat{T}\colon \Delta \to \mathbb{C}$ è una biezione continua da Δ in $\sigma_A(T) = \sigma(T)$. Dato che Δ è compatto, questa funzione è un omeomorfismo. Allora, identificando Δ con $\sigma(T)$, abbiamo prodotto uno $*$-isomorfismo di $C(\sigma(T))$ su A che mappa la funzione $\lambda \mapsto \lambda$ in T. Se $f \in C(\sigma(T))$, denotiamo l'immagine di f tramite questo isomorfismo con $f(T)$.

Ora vogliamo dare alcuni esempi di applicazione del Teorema 3.15. Il primo di questi è una dimostrazione del fatto che gli elementi nello spettro di un operatore normale sono autovalori approssimati.

Corollario 3.33. *Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normale, e $\lambda \in \sigma(T)$. Allora esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di vettori unitari tale che $(T - \lambda I)x_n$ converge a zero in $\mathcal{H}$.*

Dimostrazione. È sufficiente considerare il caso $\lambda = 0$ (basta rimpiazzare T con $T - \lambda I$). Grazie al Teorema 3.15 e all'Osservazione 3.32, esiste uno $*$-isomorfismo $\Phi\colon C(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ che mappa la funzione definita da $f(\mu) = \mu$ in T. Per ogni n, sia f_n una funzione in $C(\sigma(T))$ di norma 1, che assume il valore 1 in 0, e che svanisce fuori del disco di raggio $1/n$ centrato in 0. Si osservi che $ff_n \to 0$ in norma in $C(\sigma(T))$. Dato che Φ è isometrico, $\Phi(ff_n) = \Phi(f)\Phi(f_n) \to 0$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. D'altro canto, $\|\Phi(f_n)\|_{\text{op}} = 1$; dunque possiamo scegliere $y_n \in \mathcal{H}$ tale che $x_n = \Phi(f_n)y_n$ abbia norma 1, e valga $\|y_n\| \leqslant 2$. Dato che $Tx_n = \Phi(f)x_n = \Phi(ff_n)y_n$, abbiamo finito. □

Corollario 3.34. *Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normale. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *T è un operatore positivo ;*
2. *$\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$;*
3. *Esiste un operatore $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tale che $T = S^*S$.*

Inoltre T possiede un'unica radice quadrata *positiva $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (i.e., $S^2 = T$), e S può essere approssimata arbitariamente vicino in norma da polinomi in T.*

Dimostrazione. ($1 \Rightarrow 2$): Sia $\lambda \in \sigma(T)$. Prendiamo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come nel corollario precedente. Allora $\langle (T-\lambda I)x_n, x_n\rangle \to 0$ implica che $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda$. Dato che T è positivo, segue che $\sigma(T) \subseteq [0,\infty)$.

($2 \Rightarrow 3$): Se $\sigma(T) \subseteq [0,\infty)$, allora $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ definisce una funzione in $C(\sigma(T))$. Definiamo $S = f(T)$ come nell'Osservazione 3.32. Ora $T = S^2$, e $S^* = \bar{f}(T) = f(T) = S$.

($3 \Rightarrow 1$): È immediato. L'esistenza di una radice quadrata positiva segue da quanto detto; infatti l'opeatore S costruito sopra è positivo dato che $S = R^2$, per $R = \sqrt[4]{T}$. L'approssimazione polinomiale deriva dal fatto che f può essere approssimata uniformemente da polinomi su $\sigma(T)$.

L'unicità: sia S' un'altra radice quadrata positiva. Essa commuta con T e dunque anche con tutti i polinomi in T. Allora S' deve commutare anche con S per quanto detto appena sopra. Dunque la C^*-algebra generata da I, S, S' (che indichiamo con A) è commutativa e isomorfa a $C(\Delta)$. Si osservi che $\widehat{S}$ e $\widehat{S'}$ sono funzioni non negative su Δ (ad esempio utilizzando il Teorema 3.16, $\widehat{S}(\Delta) = \sigma_A(S) = \sigma(S) \subseteq [0,\infty)$). Dato che S e S' hanno lo stesso quadrato, $S = S'$. $\square$

Il prossimo teorema conclude l'analisi dello spettro degli operatori compatti; esso rappresenta una massimizzazione dei risultati trovati nel Capitolo 2.

Teorema 3.35 (Teorema spettrale per operatori compatti)**.** *Sia $S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ normale, e siano $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ i suoi autovalori non nulli. Allora, detta P_i la proiezione sul λ_i-autospazio,*

$$S = \sum_{i\in I} \lambda_i P_i$$

dove la somma converge in norma.

Dimostrazione. Usando il calcolo funzionale continuo, abbiamo uno $*$-isomorfismo isometrico Φ che mappa la funzione identità (indicata con f) in S. Dato che ogni λ_i è isolato in $\sigma(S)$ (per il Teorema 2.22), la funzione caratteristica f_i di $\{\lambda_i\}$ è continua su $\sigma(S)$. Se $\sigma(S)$ è infinito, allora $\lambda_i \to 0$. In ogni caso,

$$f = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i$$

in norma infinito. Dunque, $S = \sum_{i\in I} \lambda_i \Phi(f_i)$. Rimane da mostrare che $\Phi(f_i) = P_i$.

Si osservi che ogni $\Phi(f_i)$ è hermitiano e idempotente, dunque un proiettore (Teorema 3.31). Dunque vogliamo mostrare che $\operatorname{ran}\Phi(f_i) = \ker S - \lambda_i I$; a tal fine, osserviamo che $\Phi(f_i)\Phi(f_j) = \Phi(f_i f_j) = 0$ quando $i \neq j$. Allora $\mathcal{H} = M \bigoplus_{i\in I} \operatorname{ran}\Phi(f_i)$. Ora è molto semplice verificare che $\Phi(f_i) = P_i$. $\square$

3.3 MISURE SPETTRALI

In questo capitolo dimostreremo il Teorema spettrale. Assumiamo che il lettore abbia familiarità con la teoria della misura e dell'integrazione astratta. In particolare, useremo liberamente i concetti di *algebra di Borel* e *regolarità* di una misura.

Richiamiamo un risultato classico sulle misure a valori complessi, per la cui dimostrazione si rimanda a [16, p. 130].

Teorema 3.36 (Riesz-Markov)**.** *Sia* X *uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff. Indichiamo con* $C_c(X)$ *lo spazio delle funzioni continue* $X \to \mathbb{C}$ *a supporto compatto; sia* $C_0(X)$ *il completamento di* $C_c(X)$*. Per ogni funzionale lineare limitato* Λ *su* $C_0(X)$ *esiste ed è unica una misura regolare di Borel* μ *tale che*

$$\Lambda f = \int_X f d\mu \qquad (f \in C_0(X))$$

Con la prossima definizione entriamo nel vivo della teoria spettrale.

Definizione 3.37. Sia $\mathcal{M}$ una σ-algebra di un insieme X, e sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Una *misura spettrale* è una mappa

$$P\colon \mathcal{M} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

con le seguenti proprietà:

1. $P(\emptyset) = 0$ e $P(X) = I$;
2. Ogni $P(E)$ è una proiezione ortogonale;
3. $P(E \cap E') = P(E)P(E')$;
4. Se $E \cap E' = \emptyset$, allora $P(E \cup E') = P(E) + P(E')$;
5. Per ogni $x, y \in \mathcal{H}$ la funzione d'insieme $P_{x,y}$, definita da

   $$P_{x,y}(E) = \langle P(E)x, y\rangle$$

   è una misura complessa su $\mathcal{M}$.

Quando la σ-algebra è l'algebra di Borel su uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, risulta utile aggiungere

- Ogni $P_{x,y}$ è una misura di Borel regolare.

Definizione 3.38. Data una funzione misurabile $f\colon X \to \mathbb{C}$, definiamo

$$\|f\|_\infty = \inf\{k \in [0, \infty] : P(\{x : |f(x)| \geqslant k\}) = 0\}$$

Denotiamo con $L^\infty(P)$ l'insieme delle funzioni misurabili con $\|f\|_\infty < \infty$.

Osservazione 3.39*.* Come abbiamo già fatto in Sottosezione 1.0.2, secondo un uso molto comune in teoria della misura, trascuriamo il fatto che $L^\infty(P)$ sia in realtà un insieme *di classi di equivalenza* di funzioni misurabili.

Teorema 3.40. $L^\infty(P)$ *è un'algebra di Banach.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo la completezza. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geqslant N$$

Sia, per n e m in $\mathbb{N}$,

$$E_{n,m} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

Per definizione di $\|\cdot\|_\infty$, $E_{n,m}$ ha misura nulla e quindi avrà misura nulla anche l'insieme E ottenuto tramite l'unione su n, m degli $E_{n,m}$.

Sia $x \in X \setminus E$, se $n, m \geqslant N$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon \tag{3.4}$$

Pertanto, la successione numerica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$ e quindi converge ad un numero complesso $f(x)$. In definitiva, f_n converge quasi ovunque in X ad una funzione f. Passando al limite per $m \to \infty$ in 3.4, e ricordando che E ha misura nulla troviamo

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon \quad \forall n \geqslant N$$

Abbiamo che $f \in L^\infty(P)$ poiché

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f - f_N\|_\infty + \|f_N\|_\infty$$

$\square$

Proposizione 3.41. *L'insieme delle funzioni semplici (i.e., le funzioni che assumono solo un numero finito di valori) è denso in* $L^\infty(P)$.

Dimostrazione. Identifichiamo f con un suo rappresentante limitato (ovunque). Fissato $\varepsilon > 0$, è possibile suddividere il piano complesso in quadrati di lato ε, a formare un reticolo. L'ipotesi di limitatezza, ci garantisce che basta un numero finito di tali quadrati a coprire $f(X)$ (i.e., l'immagine di f). Siano $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tali quadrati e sia α_i il centro di Q_i. La funzione

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{f^{-1}(Q_i)}$$

soddisfa $\|f - s\|_\infty < \varepsilon$. $\square$

Il prossimo passo è occuparci del'integrazione di funzioni rispetto alle misure spettrali. Gli integrali che definiremo saranno non solo lineari, ma anche *moltiplicativi*.

Teorema 3.42. *Sia* P *una misura spettrale. Esiste uno* $*$*-isomorfismo isometrico* Φ *da* $L^\infty(P)$ *su una* C^**- sottoalgebra commutativa chiusa di* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$*. Inoltre, vale*

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_X f dP_{x,y} \qquad (x, y \in \mathcal{H}, f \in L^\infty(P)) \tag{3.5}$$

Questo giustifica la notazione

$$\Phi(f) = \int_X f dP \tag{3.6}$$

Vale l'uguaglianza

$$\|\Phi(f)x\|^2 = \int_X |f|^2 dP_{x,x} \qquad (x \in \mathcal{H}, f \in L^\infty(P)) \tag{3.7}$$

e un operatore $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *commuta con ogni* $P(E)$ *se e solo se esso commuta con ogni* $\Phi(f)$.

Dimostrazione. Sia $\{E_1, \dots, E_n\}$ una partizione di X con $E_i \in \mathcal{M}$, e sia s una funzione semplice tale che $s = \alpha_i$ su E_i. Definiamo $\Phi(s)$

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(E_i) \tag{3.8}$$

Dato che ogni $P(E_i)$ è hermitiano,

$$\Phi(s)^* = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i P(E_i) = \Phi(\bar{s}) \tag{3.9}$$

Se $\{E'_1, \dots, E'_n\}$ è un'altra partizione, e se $t = \beta_j$ su E'_j, allora

$$\Phi(s)\Phi(t) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j P(E_i)P(E_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j P(E_i \cap E_j)$$

Dato che st è la funzione semplice che vale $\alpha_i\beta_j$ su $E_i \cap E_j$, segue che $\Phi(s)\Phi(t) = \Phi(st)$. Con argomenti totalmente analoghi si può dimostrare che $\Phi(\alpha s + \beta t) = \alpha\Phi(s) + \beta\Phi(t)$.

Se $x, y \in \mathcal{H}$, grazie a 3.8 abbiamo

$$\langle \Phi(s)x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle P(E_i)x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_{x,y}(E_i) = \int_X s\, dP_{x,y} \tag{3.10}$$

Grazie a 3.9,

$$\Phi(s)^*\Phi(s) = \Phi(\bar{s})\Phi(s) = \Phi(\bar{s}s) = \Phi(|s|^2)$$

Dunque, combinando con 3.10,

$$\|\Phi(s)x\|^2 = \langle \Phi(s)^*\Phi(s)x, x\rangle = \langle \Phi(|s|^2)x, x\rangle = \int_X |s|^2 dP_{x,x} \tag{3.11}$$

Dato che

$$\|P_{x,x}\| = P_{x,x}(X) = \langle P(X)x, x\rangle = \|x\|^2$$

otteniamo

$$\|\Phi(s)x\| \leqslant \|s\|_\infty \|x\| \tag{3.12}$$

D'altro canto, se $x \in \operatorname{ran} P(E_i)$, allora $\Phi(s)x = \alpha_i P(E_i)x = \alpha_i x$ poiché le proiezioni $P(E_i)$ hanno immagini ortogonali a due a due (questo deriva direttamente dal punto 3 di Definizione 3.37). Se quindi scegliamo i tale che $|\alpha_i| = \|s\|_\infty$, segue da 3.12 che

$$\|\Phi(s)\|_{\text{op}} = \|s\|_\infty \tag{3.13}$$

Ora supponiamo $f \in L^\infty(P)$. Esiste una successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici misurabili che convergono a f in norma. Grazie a 3.13, sappiamo che la corrispondente successione $\Phi(s_n)$ è di Cauchy in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e sarà dunque convergente a un operatore che indichiamo con $\Phi(f)$. È facile verificare che tale limite non dipende dalla scelta di (s_n). Chiaramente, 3.13 ci porta a

$$\|\Phi(f)\|_{\text{op}} = \|f\|_\infty \tag{3.14}$$

A questo punto, 3.5 segue da 3.10 (con s_n in luogo di s) poiché ogni $P_{x,y}$ è una misura finita. Inoltre 3.6 e 3.7 seguono da 3.9 e 3.11; se le funzioni limitate f, g vengono approssimate con funzioni semplici, vediamo che Φ è effettivamente un omomorfismo. Dato che $L^\infty(P)$ è completo, l'immagine $A = \Phi(L^\infty(P))$ è chiusa in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ per via di 3.14.

Infine, se T commuta con ogni $P(E_i)$, allora commuta con ogni $\Phi(s)$ per ogni funzione semplice s; ancora una volta, un argomento di approssimazione analogo ai precedenti mostra che T commuta con ogni membro di A. □

La principale affermazione del Teorema spettrale è che ogni operatore lineare limitato normale su $\mathcal{H}$ induce (in modo canonico) una misura spettrale P sull'algebra di Borel di $\sigma(T)$; inoltre T può essere ricostruito a partire da P grazie ad un integrale del tipo discusso nel teorema precedente. La chiave del discorso sta nella dimostrazione del prossimo teorema.

Teorema 3.43. *Se A è una C^*-sottoalgebra commutativa chiusa di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ con spazio ideale massimale Δ, allora valgono le seguenti affermazioni:*

- *Esiste un'unica misura spettrale P definita sull'algebra di Borel di Δ che soddisfa*

$$T = \int_\Delta \widehat{T} dP \tag{3.15}$$

  per ogni $T \in A$, dove $\widehat{T}$ è la trasformata di Gelfand di T.

- *L'inversa della trasformata di Gelfand (i.e, $\widehat{T} \mapsto T$) si estende a uno $*$-isomorfismo isometrico Φ dall'algebra $L^\infty(P)$ su una sottoalgebra chiusa di $B \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $B \supseteq A$, dato da*

$$\Phi(f) = \int_\Delta f dP \tag{3.16}$$

- *B risulta essere la chiusura dell'insieme di tutte le combinazioni lineari finite delle proiezioni $P(E)$;*

- *Un operatore $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ commuta con ogni $T \in A$ se e solo se commuta con ogni proiezione $P(E)$.*

Dimostrazione. L'algebra A è una C^*-algebra commutativa, dunque il Teorema spettrale astratto asserisce che $T \mapsto \widehat{T}$ è uno $*$-isomorfismo isometrico di A su $C(\Delta)$. Ricordiamo che 3.15 è una abbreviazione per

$$\langle Tx, y\rangle = \int_X \widehat{T} dP_{x,y} \tag{3.17}$$

Dato che le misure di Borel $P_{x,y}$ sono assunte essere regolari, 3.17 mostra che esse sono unicamente determinate; questo deriva dall'unicità che è parte dell'enunciato del Teorema di rappresentazione di Riesz-Markov. Dato che per definzione $\langle P(E)x, y\rangle = P_{x,y}(E)$, anche le proiezioni $P(E)$ risultano unicamente determinate.

Analogamente, dati $x, y \in \mathcal{H}$, il Teorema 3.36 fornisce un'unica misura regolare di Borel $\mu_{x,y}$ tale che

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_\Delta f d\mu_{x,y} \tag{3.18}$$

per ogni $f \in C(\Delta)$. Definiamo $\Phi(g)$ per $g \in L^\infty(P)$ tramite la stessa formula. Non è difficile verificare che $\Phi(g)$ è un operatore lineare limitato.[1] Sappiamo che T è hermitiano se e solo se $\widehat{T}$ è a valori reali. Per un tale T,

$$\int_\Delta \widehat{T} d\mu_{x,y} = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \overline{\int_\Delta \widehat{T} d\mu_{y,x}}$$

e questo implica $\mu_{y,x} = \overline{\mu_{x,y}}$. Allora

$$\langle \Phi(\bar{f})x, y\rangle = \int_\Delta \bar{f} d\mu_{x,y} = \overline{\int_\Delta f d\mu_{y,x}} = \overline{\langle \Phi(f)y, x\rangle} = \langle x, \Phi(f)y\rangle$$

per ogni $x, y \in \mathcal{H}$, cioè $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$.

Il prossimo obiettivo è l'uguaglianza $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$. Se $S, T \in A$, allora $\widehat{ST} = \widehat{S}\widehat{T}$; dunque

$$\int_\Delta \widehat{S}\widehat{T} d\mu_{x,y} = \langle STx, y\rangle = \int_\Delta \widehat{S} d\mu_{Tx,y}$$

Questo è vero per ogni $\widehat{S} \in C(\Delta)$, quindi i due integrali sono uguali se $\widehat{S}$ viene sostituito da una qualsiasi funzione di Borel f limitata. Allora

$$\int_\Delta f\widehat{T} d\mu_{x,y} = \int_\Delta f d\mu_{Tx}y = \langle \Phi(f)Tx, y\rangle = \langle Tx, z\rangle = \int_\Delta \widehat{T} d\mu_{x,z}$$

dove abbiamo posto $z = \Phi(f)^* y$. Ancora, il primo e l'ultimo integrale rimagono uguali se rimpiazziamo $\widehat{T}$ con g. Questo restituisce

$$\langle \Phi(fg)x, y\rangle = \int_\Delta fg d\mu_{x,y} = \int_\Delta g d\mu_{x,z} = \langle \Phi(g)x, z\rangle = \langle \Phi(g)x, \Phi(f)^* y\rangle = \langle \Phi(f)\Phi(g)x, y\rangle$$

che è quanto volevamo.

Ora possiamo definire P: se E è un sottoinsieme di Borel di Δ, sia χ_E la sua funzione caratteristica, e poniamo

$$P(E) = \Phi(\chi_E)$$

Grazie alla moltiplicatività di Φ, $P(E \cap E') = P(E)P(E')$. Con $E = E'$, questo mostra anche che $P(E)$ è idempotente. Dato che $\Phi(f)$ è hermitiano quando f è reale, abbiamo che $P(E)$ è hermitiano. È chiaro che $P(\emptyset) = \Phi(0) = 0$. Come conseguenza di 3.18 e di

$$P_{x,y}(E) = \langle P(E)x, y\rangle = \int_\Delta \chi_E d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(E) \qquad (x, y \in \mathcal{H})$$

abbiamo $P(\Delta) = I$, la finita additività di P, e 3.15. La proprietà di isometria discende dal Teorema 3.42. I primi due punti sono completati.

Il terzo punto deriva dal fatto che ogni $f \in L^\infty(P)$ è limite uniforme di funzioni semplici.

---

1 In questo passaggio usiamo il fatto che $\mu_{x,y}$ è unicamente determinata. Ad esempio, dobbiamo avere $\mu_{x+z,y} = \mu_{x,y} + \mu_{z,y}$; segue che $\Phi(g)(x+z) = \Phi(g)x + \Phi(g)z$.

Infine, scelti $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), x, y \in \mathcal{H}$, e posto $z = S^* y$, per ogni $T \in A$ e ogni insieme di Borel $E \subseteq \Delta$ abbiamo

$$\langle STx, y \rangle = \langle Tx, z \rangle = \int_\Delta \widehat{T} dP_{x,z} \tag{3.19}$$

$$\langle TSx, y \rangle = \int_\Delta \widehat{T} dP_{Sx,y} \tag{3.20}$$

Inoltre, valgono anche le seguenti relazioni:

$$\langle SP(E)x, y \rangle = \langle P(E)x, z \rangle = P_{x,z}(E)$$
$$\langle P(E)Sx, y \rangle = P_{Sx,y}(E)$$

Se $ST = TS$ per ogni $T \in A$, le misure in 3.19 e 3.20 sono uguali, cosicché $SP(E) = P(E)S$. Lo stesso argomento stabilisce l'implicazione inversa. Abbiamo concluso. □

Dimostriamo il seguente teorema di commutatività.

Teorema 3.44 (Fuglede-Putnam-Rosenblum). *Siano* $M, N, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, M, N *normali, e*

$$MT = TN \tag{3.21}$$

Allora $M^* T = TN^*$.

Dimostrazione. Supponiamo $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Poniamo $R = S - S^*$, e definiamo

$$Q = \exp(R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$$

Allora $R^* = -R$, e dunque

$$Q^* = \exp(R^*) = \exp(-R) = Q^{-1}$$

Dunque $\|Q\|_{op} = 1$ (vedi Proposizione 3.28). Una conseguenza è

$$\|\exp(S - S^*)\|_{op} = 1 \quad \forall S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

Se 3.21 è valida, allora $M^n T = TN^n$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ per induzione. Dunque $\exp(M)T = T\exp(N)$, o anche

$$T = \exp(-M) T \exp(N) \tag{3.22}$$

Poniamo $U_1 = \exp(M^* - M), U_2 = \exp(N - N^*)$. Per normalità, usiamo 3.22 e troviamo

$$\exp(M^*) T \exp(-N^*) = U_1 T U_2$$

Abbiamo visto che $\|U_1\|_{op} = \|U_2\|_{op} = 1$, cosicché

$$\|\exp(M^*) T \exp(-N^*)\|_{op} \leqslant \|T\|_{op} \tag{3.23}$$

A questo punto definiamo

$$f(\alpha) = \exp(\alpha M^*) T \exp(-\alpha N^*) \qquad (\alpha \in \mathbb{C}) \tag{3.24}$$

Le ipotesi del teorema rimangono vere con $\bar{\alpha}M$ e $\bar{\alpha}N$ in luogo di M e N. Quindi 3.23 implica $\|f(\alpha)\|_{op} \leqslant \|T\|_{op}$ per ogni numero complesso α. Cioè f è una funzione *intera* limitata. Per il Teorema di Liouville, $f(\alpha) = f(0) = T$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$. Allora 3.24 diventa

$$\exp(\alpha M^*)T = T\exp(\alpha N^*)$$

e uguagliando i coefficienti di α nello sviluppo in serie segue la tesi. □

Siamo ora pronti per dimostrare il risultato principale della sezione, che segue facilmente dal Teorema 3.43.

Corollario 3.45 (Teorema spettrale per operatori normali)**.** *Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ è normale, allora esiste un'unica misura spettrale P sull'algebra di Borel di $\sigma(T)$ che soddisfa*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dP(\lambda) \tag{3.25}$$

Inoltre, ogni proiezione $P(E)$ commuta con ogni $S \in \{T\}'$ (i.e., con ogni $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ che commuta con T).

Dimostrazione. Sia A la C^*-algebra generata da I, T, T^*. Per normalità di T, il Teorema 3.43 si applica ad A. Grazie all'Osservazione 3.32, lo spazio ideale massimale di A può essere identificato con $\sigma(T)$ in modo che $\widehat{T}(\lambda) = \lambda$ per ogni $\lambda \in \sigma(T)$. L'esistenza di P segue ora dal Teorema 3.43.

D'altro canto, se P esiste e 3.25 vale, il Teorema 3.42 mostra che

$$p(T, T^*) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda, \bar{\lambda}) dP(\lambda) \tag{3.26}$$

dove p è un polinomio in due variabili a coefficienti complessi. Per via del Teorema di Stone-Weierstrass, questi polinomi sono densi in $C(\sigma(T))$. Allora le proiezioni $P(E)$ sono univocamente determinate dagli integrali in 3.26, in modo analogo alla dimostrazione di unicità data nel Teorema 3.43.

Se $ST = TS$, allora il Teorema 3.44 asserisce $ST^* = T^*S$; dunque S commuta con ogni membro di A, e possiamo applicare ancora il Teorema 3.43. □

4 SOTTOSPAZI INVARIANTI

In questo capitolo usiamo la teoria precedentemente sviluppata per dimostrare diversi risultati sui sottospazi invarianti per operatori.

Proposizione 4.1. $\operatorname{Lat} T = \{(0), X\}$ *se e solo se* x *è ciclico per ogni* $x \in X \setminus \{0\}$*.*

Dimostrazione. Sia M un sottospazio invariante e non banale. Allora si ha $W(x) \subseteq M$ per ogni $x \in M \setminus \{0\}$. Ne segue che x non è T-ciclico. D'altra parte, se x non è T-ciclico, allora $W(x) \neq X$ e, dato che x è non nullo, $W(x) \neq (0)$. Dunque $W(x)$ è un sottospazio invariante non banale. □

Teorema 4.2. *Se* X *è non separabile, allora* $\operatorname{Lat} T \neq \{(0), X\}$ *per ogni* $T \in \mathcal{L}(X)$*.*

Dimostrazione. Scelto $x \in X \setminus \{0\}$, si ha che $W(x)$ è non nullo e separabile, dunque $W(x) \neq X$. Dunque x non è T-ciclico e possiamo applicare la Proposizione 4.1. □

Dimostriamo un teorema di esistenza per operatori compatti.

Teorema 4.3 (Aronszajn-Smith [1])**.** *Se* $S \in \mathcal{K}(X)$ *allora* $\operatorname{Lat} S \neq \{(0), X\}$*.*

Dimostrazione. Supponiamo $S \neq 0$ e normalizziamolo in modo che

$$\|S\|_{\text{op}} = 1 \tag{4.1}$$

Possiamo scegliere $x_0 \in X$ tale che

$$\|Sx_0\| > 1, \quad \|x_0\| > 1 \tag{4.2}$$

Segue da (4.2) che $0 \notin \overline{B_1(x_0)} = \{x \in X : \|x - x_0\| \leqslant 1\}$. Per compattezza di S, abbiamo che $K = \overline{SB_1(x_0)}$ è un insieme compatto. Si ricava da (4.1) e (4.2) che K non contiene l'origine.

Proveremo l'esistenza di un sottospazio invariante per assurdo: assumiamo che gli unici sottospazi invarianti di S siano banali. Scelto $y \in X \setminus \{0\}$ in modo arbitrario, abbiamo che l'insieme $\overline{\{p(S)y : p \in \mathbb{C}[t]\}}$ deve essere X (vedi Proposizione 1.4). Dunque $\{p(S)y : p \in \mathbb{C}[t]\}$ è denso. In particolare, per y in K esiste un polinomio p tale che

$$\|p(S)y - x_0\| < 1 \tag{4.3}$$

Si vede facilmente che l'insieme degli y che soddisfano (4.3) per p fissato è aperto. Tali aperti coprono K, e visto che questo è compatto, ne possiamo scegliere un numero finito. Dunque esiste una collezione finita di polinomi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tali che per ogni $y \in K$ rimane soddisfatta la disuguaglianza (4.3) per qualche $p = p_i$. Per convenienza tipografica poniamo $p_i(S) = S_i$ ed esprimiamo lo stato delle cose nel seguente modo: per ogni y in K,

$$\|S_i y - x_0\| < 1 \tag{4.4}$$

per almeno un indice i. Dato che $Sx_0 \in K$ possiamo porre $y = Sx_0$ in (4.4) e concludere che per un indice i_1 si deve avere $\|S_{i_1}Sx_0 - x_0\| < 1$. Ma allora $S_{i_1}Sx_0$ appartiene a $B_1(x_0)$ e $SS_{i_1}Sx_0$ appartiene nuovamente a K. Perciò possiamo porre $y = SS_{i_1}Sx_0$ in (4.4) e concludere che per un indice i_2 si ha

$$\|S_{i_2}SS_{i_1}Sx_0 - x_0\| < 1$$

Iterando questo argomento, otteniamo la seguente:

$$\|\prod_{j=1}^{n}(S_{i_j}S)x_0 - x_0\| < 1$$

Usando la disuguaglianza trangolare otteniamo

$$\|\prod_{j=1}^{n}(S_{i_j}S)x_0\| \geqslant \|x_0\| - 1$$

(notare che grazie a (4.2) il membro di destra è positivo). Ora osserviamo che gli operatori S_i, essendo dei polinomi in S, commutano tra di loro e con S, dunque possiamo scrivere

$$\|\left(\prod_{j=1}^{n}S_{i_j}\right)S^n x_0\| \geqslant \|x_0\| - 1$$

Ora poniamo $c = \sup_j \|S_{i_j}\|_{op}$ e troviamo

$$c^n\|S^n\|_{op}\|x_0\| \geqslant \|x_0\| - 1$$

Prendendo la radice n-esima e passando al limite per $n \to \infty$, concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty}\|S^n\|_{op}^{1/n} \geqslant \frac{1}{c} > 0$$

Secondo la teoria sviluppata in precedenza, la quantità a sinistra è il raggio spettrale di T (vedi Teorema 2.17). Dunque $\rho(S) > 0$, lo spettro di S contiene altri punti oltre all'origine. Secondo il Teorema 2.22, questi punti sono autovalori di S di molteplicità finita. I relativi autovettori generano sottospazi invarianti di dimensione uno — contraddizione. □

È chiaro che, una volta che si è provata l'esistenza di un sottospazio invariante, possiamo invocare ripetutamente il teorema e dimostrare che esiste una infinità di sottospazi con la stessa proprietà. Vogliamo terminare la sottosezione con un risultato dovuto a Ringrose [14], che ha esplorato queste famiglie di sottospazi in un articolo interessante.

Definizione 4.4. Una famiglia di sottospazi invarianti di X si chiama *catena* se i sottospazi sono *totalmente* ordinati dall'inclusione. Denoteremo una catena col simbolo $\mathcal{N}$.

Osservazione 4.5. Una applicazione del Lemma di Zorn ci garantisce l'esistenza di catene *massimali*.

Teorema 4.6 (Ringrose)**.** *Sia* $S \in \mathcal{K}(X)$ *e* $\mathcal{N}$ *una catena massimale. Sia* $M \in \mathcal{N}$ *e denotiamo con* $\widehat{M}$ *il sottospazio*

$$\widehat{M} = \bigvee\{L \in \mathcal{N} : L \textit{ è un sottospazio proprio di } M\} \tag{4.5}$$

Per massimalità, $\widehat{M}$ *appartiene alla catena* $\mathcal{N}$*.*

1. *Lo spazio quoziente* $M/\widehat{M}$ *ha dimensione* 0 *oppure* 1*;*

2. *Se* $\dim M/\widehat{M} = 1$ *allora* S *mappa* $M/\widehat{M}$ *in sé come una moltiplicazione per uno scalare* μ*. Se* $\mu \neq 0$*,* μ *è un autovalore di* S*;*

3. *Al contrario, ogni autovalore non nullo* λ *di* S *occorre come* μ *per qualche* M *in* $\mathcal{N}$*. Il numero di volte che* λ *occore come* μ *in* $\mathcal{N}$ *uguaglia la molteplicità algebrica di* λ *come autovalore di* S*, cioè*

$$\max_i \dim \ker(\lambda I - S)^i$$

Dimostrazione.

1. Come abbiamo osservato nella Proposizione 2.7, $S\colon M/\widehat{M} \to M/\widehat{M}$ è una mappa compatta. Se fosse $\dim M/\widehat{M} > 1$, allora potremmo invocare il Teorema 4.3 e produrre un sottospazio invariante non banale di $M/\widehat{M}$. A questo sottospazio corrisponde un sottospazio invariante L che ha la proprietà di contenere propriamente $\widehat{M}$ e di essere contenuto propriamente in M. Per massimalità, L deve appartenere a $\mathcal{N}$, ma questo contraddice la definizione di $\widehat{M}$;

2. $\mu I - S$ è l'operatore nullo dello spazio $M/\widehat{M}$. Questo ci dice che $\mu I - S$ mappa lo spazio M in $\widehat{M}$. Dato che S ristretto a M è compatto e $\mu \neq 0$, sappiamo dal Teorema 2.8 che la dimensione di $\ker \mu I - S$ uguaglia la codimensione di $(\mu I - S)M$. Dato che $(\mu I - S)M$ ha codimensione almeno uno, esistono vettori non nulli nel nucleo di $\mu I - S$. Vale a dire μ è un autovalore;

3. Supponiamo che λ sia un autovalore di S e x un corrispondente autovettore. Definiamo $\mathcal{A}_x$ l'insieme dei sottospazi di $\mathcal{N}$ che contengono x. Sia $M = \cap\{L : L \in \mathcal{A}_x\}$ e $\widehat{M}$ come nell'enunciato. Osserviamo che M appartiene a $\mathcal{A}_x$. Supponiamo che $\widehat{M}$ sia propriamente contenuto in M; allora esso non contiene x, in quanto M è per definizione il più picolo sottospazio contenente x. Allora $M/\widehat{M}$ è rappresentato da x, e l'azione di S su x è la moltiplicazione per λ. Ne segue $\mu = \lambda$. Per completare la dimostrazione, dobbiamo provare che la nostra supposizione è lecita, cioè che $\widehat{M}$ risulta sempre propriamente contenuto in M. Secondo l'Alternativa di Fredholm, un vettore $y \in X$ appartiene a $\operatorname{ran} S - \lambda I$ se e solo se $\langle y, \Lambda \rangle = 0$ per ogni funzionale Λ appartenente al nucleo della trasposta $S^* - \lambda I$. Consideriamo per semplicità il caso in cui λ ha molteplicità uno. Asseriamo che l'autovettore corrispondente x soddisfa $\langle x, \Lambda \rangle \neq 0$. Se così non fosse, avremmo che, per qualche z, $(S - \lambda I)z = x$. Da questa relazione segue

$$(S - \lambda I)^2 z = 0$$

che farebbe di z un autovettore generalizzato, e di λ un autovalore di molteplicità almeno 2. Sia L un sottospazio di $\mathcal{N}$ propriamente contenuto in M; tale L non contiene x. Dato che λ ha molteplicità uno, il nucleo di $S - \lambda I$ è generato dal solo autovettore x. Questo significa che la restrizione di $S - \lambda I$ al sottospazio L è un operatore iniettivo. Ancora grazie al Teorema 2.9 possiamo concludere che questo operatore è anche suriettivo e dunque per ogni y in L rimane verificata la relazione $\langle y, \Lambda \rangle = 0$. A questo punto possiamo mostrare che il vettore x non appartiene a $\widehat{M}$. Se infatti vi appartenesse, esso sarebbe il limite di una successione di vettori $y_n \in L_n$, tutti propriamente contenuti in M. Passando al limite nella relazione $\langle y_n, \Lambda \rangle$ otterremmo un assurdo.

Dovrebbe essere chiaro come il teorema appena mostrato rappresenti l'analogo infinito-dimensionale del Teorema 1.5. □

Definizione 4.7. Sia $T \in \mathcal{L}(X)$.

- Il *centralizzatore* di T è l'insieme $\{T\}' = \{S \in \mathcal{L}(X) : ST = TS\}$;
- Il sottospazio $M \subseteq X$ si dice *iperinvariante* per T se $M \in \mathrm{Lat}\{T\}'$.

Teorema 4.8 (Lomonosov [9]). *Sia* $T \in \mathcal{L}(X)$, *non multiplo dell'identità. Se esiste* $S \in \mathcal{K}(X)$ *non nullo tale che* $ST = TS$, *allora* $\mathrm{Lat}\{T\}' \neq \{(0), X\}$.

La dimostrazione originale di questo risultato prevede l'applicazione del Teorema di punto fisso di Schauder. Una dimostrazione semplificata, data T. M. Hilden (e pubblicata da Michaels [11]), fa uso della formula del raggio spettrale; ne risulta un enunciato leggermente più debole. Esporremo qui la seconda dimostrazione in quanto più coerente con la teoria finora sviluppata.

Teorema 4.9. *Se* $S \in \mathcal{K}(X) \setminus \{0\}$, *allora* $\mathrm{Lat}\{S\}' \neq \{(0), X\}$.

Dimostrazione. Per ogni $y \in X$, introduciamo la notazione $\{Sy\}' = \{Ty : T \in \{S\}'\}$. Si verifica facilmente che $\{S\}'$ è una sottoalgebra chiusa di $\mathcal{L}(X)$, dunque $\{Sy\}'$ è un sottospazio chiuso di X. Se $y \neq 0$ allora anche $\{Sy\}' \neq (0)$. Inoltre, $\{Sy\}'$ è iperinvariante per S, semplicemente perché il centralizzatore è chiuso rispetto alla moltiplicazione.

Supponiamo, per assurdo, che la conclusione del teorema sia falsa; dunque per ogni y non nullo si ha $\{Sy\}' = X$. Prendiamo x_0 tale che $Sx_0 \neq 0$. Allora $x_0 \neq 0$, e la continuità di S mostra che esiste una palla aperta $B(x_0)$ centrata in x_0, così piccola che

$$\|Sx\| \geqslant \frac{1}{2}\|Sx_0\| \qquad \|x\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_0\| \tag{4.6}$$

per ogni $x \in B(x_0)$. La nostra assunzione implica che ogni $y \neq 0$ possiede un intorno U che viene mappato nell'aperto $B(x_0)$ da qualche $T \in \{S\}'$. Per compattezza di S, $K = \overline{SB(x_0)}$ è un insieme compatto. Grazie a (4.6), sappiamo che $0 \notin K$. Dunque esiste un ricoprimento finito di K, diciamo $V_1, \dots, V_n$, tale che $T_i V_i \subseteq B(x_0)$ per qualche $T_i \in \{S\}'$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Si ponga

$$c = \sup_{i=1,\dots,n} \|T_i\|_{\mathrm{op}}$$

Cominciando con x_0, abbiamo che Sx_0 giace in K, dunque in qualche V_{i_1}, e $T_{i_1}Sx_0 \in B(x_0)$. Allora $ST_{i_1}Sx_0$ giace in K, dunque in qualche V_{i_2}, e allora $T_{i_2}ST_{i_1}Sx_0$ è di nuovo in $B(x_0)$. Iterando questo ragionamento (la *ping-pong technique* di Hilden), otteniamo vettori

$$x_n = T_{i_n}S \cdots T_{i_1}Sx_0 = T_{i_n} \cdots T_{i_1}S^n x_0$$

in $B(x_0)$. Allora possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}\|x_0\| \leqslant \|x_n\| \leqslant c^n \|S^n\|_{op}\|x_0\| \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

e questo ci da informazioni sul raggio spettrale di S,

$$\rho(S) = \lim_{n \to \infty} \|S^n\|_{op}^{1/n} \geqslant \frac{1}{c} > 0$$

Per il Teorema 2.22, sappiamo che esiste un autovalore λ. Il corrispondente autospazio $M_\lambda = \{x \in X : Sx = \lambda x\}$ è finito-dimensionale, dunque diverso da X. Preso $T \in \{S\}'$ e $x \in M_\lambda$ abbiamo che

$$STx = TSx = T\lambda x = \lambda Tx$$

Questo significa che $Tx \in M_\lambda$. Ma allora M_λ soddisfa la conclusione del teorema, che avevamo supposto essere falsa. □

Osservazione 4.10. Il lettore si chiederà se esistano operatori a cui non è possibile applicare il Teorema di Lomonosov. Solamente nel 1981, dopo ben sette anni dalla pubblicazione del teorema, si è trovato un operatore di questo genere. Esso appartiene alla classe degli *shift quasi-analitici*; per saperne di più si rimanda a [7].

Abbiamo l'esistenza di sottospazi invarianti per operatori normali.

Teorema 4.11. *Sia* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *non multiplo dell'identità. Se* T *è normale, allora* $\mathrm{Lat}\{T\}' \neq \{(0), \mathcal{H}\}$ *(i.e.,* T *ammette sottospazi iperinvarianti non banali).*

Dimostrazione. Se $\sigma(T)$ fosse ridotto ad un singolo punto, avremmo una identificazione tra $C(\sigma(T)), \mathbb{C}$ e la C^*-algebra generata da I, T, T^*. Questo non è possibile perché abbiamo supposto che T non sia un multiplo scalare dell'identità. Allora possiamo trovare due insiemi disgiunti di Borel tali che

$$E_1 \cup E_2 = \sigma(T), \quad P(E_1) \neq 0, \quad P(E_2) \neq 0$$

Il sottospazio chiuso $\operatorname{ran} P(E_1)$ è iperinvariante; presi $x \in \operatorname{ran} P(E_1), S \in \{T\}'$ abbiamo (grazie al Corollario 3.45):

$$Sx = SP(E_1)x = P(E_1)Sx$$

cosicché $Sx \in \operatorname{ran} P(E_1)$. □

4.0.1 Alcuni commenti

Sia X uno spazio di Banach, $T, R \in \mathcal{L}(X)$, e $S \in \mathcal{K}(X)$. Il Teorema di Lomonosov (Teorema 4.8) asserisce che T possiede un sottospazio invariante non banale se esso commuta con R, e se R commuta con S. Una domanda che sorge spontanea è la seguente: è possibile estendere il teorema in modo che sia valido per catene di 4 operatori (i.e., $T, R_1, R_2 \in \mathcal{L}(X), S \in \mathcal{K}(X)$)? La risposta è negativa ed è stata fornita da Troitsky [17].

Il matematico Enflo [6] è stato il primo a costruire un operatore lineare limitato (su uno spazio di Banach) che non ammette sottospazi invarianti non banali. Il suo lavoro è stato semplificato da Read [13], che ha costruito un operatore con analoghe proprietà sullo spazio l^1.

Ad oggi, tutti gli esempi di operatori che non ammettono sottospazi invarianti non banali sono su spazi che contengono una copia isometrica di l^1. Al momento, non è possibile dire se questa condizione sia effettivamente necessaria. Nel contesto degli spazi di Hilbert, l'esistenza di sottospazi invarianti non banali per operatori è in generale un problema aperto.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Aronszajn e K. T. Smith. «Invariant subspaces of completely continuous operators». In: *Ann. of Math.* 60 (1954), pp. 345–350 (cit. a p. 49).

[2] B. Beauzamy. *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*. North-Holland, 1988.

[3] B. Brosowski e F. Deutsch. «An elementary proof of the Stone-Weierstrass Theorem». In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 81 (1981) (cit. a p. 29).

[4] I. Chalendar e J. R. Partington. «An overview of some recent developments on the Invariant Subspace Problem». In: *Concrete Operators* 1 (2012), pp. 1–10.

[5] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1985 (cit. a p. 35).

[6] P. Enflo. «On the invariant subspace problem for Banach spaces». In: *Acta. Math.* 158 (1987), pp. 213–313 (cit. a p. 54).

[7] D. W. Hadwin et al. «An Operator Not Satisfying Lomonosov's Hypothesis». In: *J. Func. Anal.* 38 (1980), pp. 410–415 (cit. a p. 53).

[8] P. D. Lax. *Functional Analysis*. Wiley Interscience, 2002 (cit. a p. 8).

[9] V. I. Lomonosov. «Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator». In: *Functional Anal. Appl.* 7 (1973), pp. 213–214 (cit. a p. 52).

[10] M. Manetti. *Topologia*. Springer, 2008 (cit. alle pp. 3, 14, 17).

[11] A. J. Michaels. «Hilden's simple proof of Lomonosov's Invariant Subspace Theorem». In: *Advances in Math.* 25 (1977), pp. 56–58 (cit. a p. 52).

[12] J. A. Noel. «The Invariant Subspace Problem». Thesis for the degree of Bachelor of Science. Thompson Rivers Univesity, 2011.

[13] C. Read. «A solution of the invariant subspace problem on the space l_1». In: *Bull. London Math. Soc.* 17 (1985), pp. 305–317 (cit. a p. 54).

[14] J. R. Ringrose. «Superdiagonal forms for compact linear operators». In: *Proc. London Math. Soc.* 12 (1962), pp. 367–384 (cit. a p. 50).

[15] W. Rudin. *Functional Analysis*. Mc-Graw Hill, 1991 (cit. a p. 12).

[16] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc-Graw Hill, 1987 (cit. a p. 40).

[17] V. G. Troitsky. «Lomonosov's theorem cannot be extended to chains of four operators». In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2000), pp. 521–525 (cit. a p. 54).

[18] D. P. Williams. *Lecture notes on the Spectral Theorem*. 2008. URL: `http://www.math.dartmouth.edu/~dana/bookspapers/ln-spec-thm.pdf`.

[19] B. S. Yadav. «The Present State and Heritages of the Invariant Subspace Problem». In: *Milan J. Math.* 73 (2005), pp. 289–316.